

# **SIDANG TESIS**

**ANALISA MODEL EPIDEMIK DUA WILAYAH DUA LINTASAN**

***ANALYZE OF TWO REGIONS TWO PATCHES EPIDEMIC MODEL***

**Nurlita Wulansari (1214201035)**

**Dosen Pembimbing:**

Dr. Hariyanto, M.Si.

Dr. Chairul Imron, Ml.Komp.

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER**

**SURABAYA**

**2015**

# Latar Belakang



Model  
epidemiologi

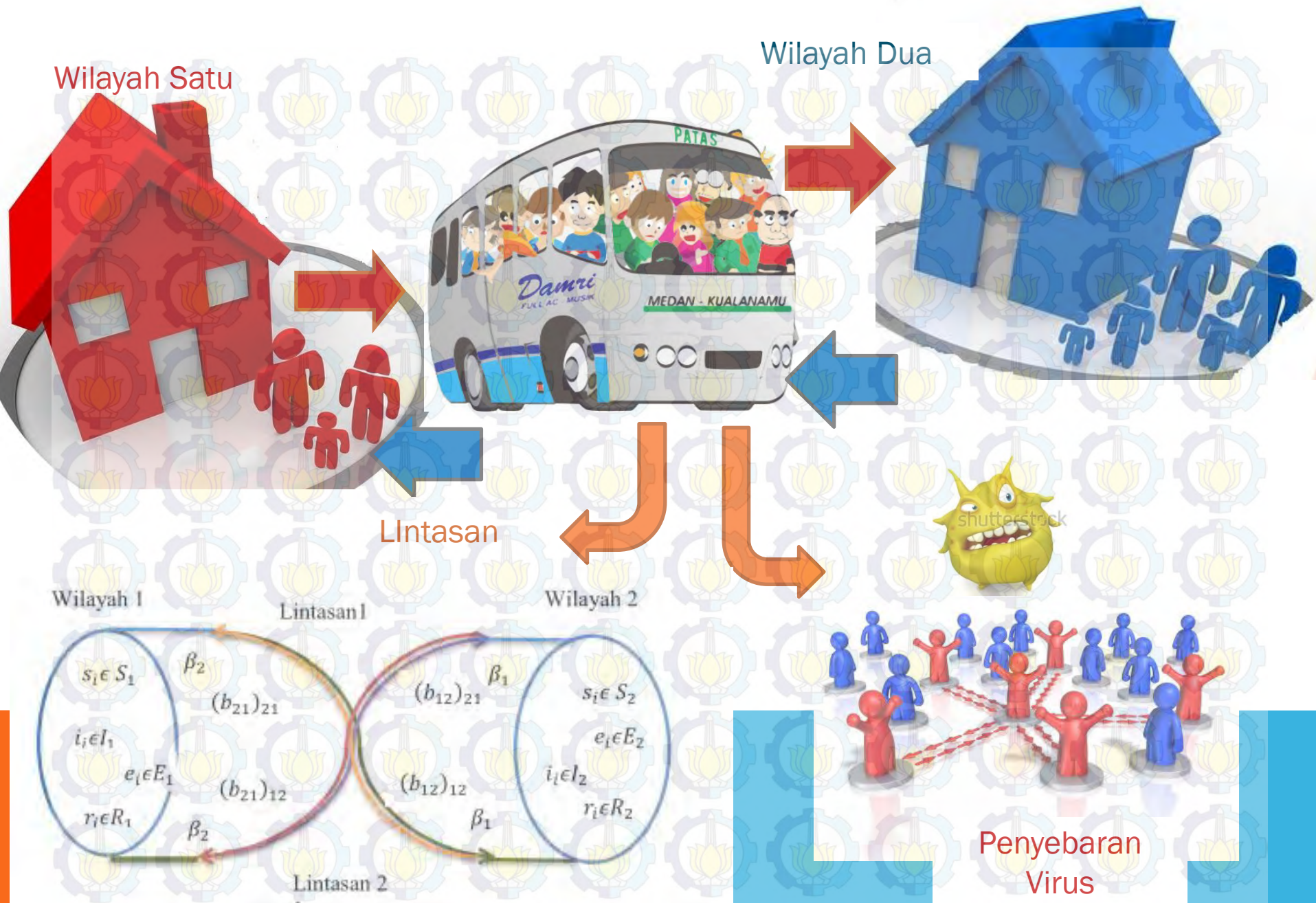
Model Epidemik  
Dua-Wilayah  
Dua-Lintasan



Penelitian  
terdahulu







Gambar 4.16. Lintasan terjadinya *rate* transmisi dan *rate* travelling



# Rumusan Masalah

Bagaimana mengkonstruksi model epidemik SEIR penyebaran penyakit menular antar dua wilayah dengan melalui dua lintasan yang menghubungkan dua wilayah tersebut.

Bagaimana menentukan rumus  $\mathcal{R}_0$  pada masing-masing wilayah dan  $\mathcal{R}_0$  pada lintasan yang menghubungkan dua wilayah tersebut.

Bagaimana simulasi  $\mathcal{R}_0$  dari model tipe SEIR dengan menggunakan metode Runge – Kutta.

# Batasan Masalah

Individu yang menjadi objek penelitian ini adalah manusia.

Individu yang baru lahir memiliki kekebalan alami, sehingga masuk dalam subpopulasi *Susceptible*

banyaknya kota asal ada dua, banyaknya lintasan ada dua, banyaknya kota tujuan ada dua.

Virus yang diamati satu spesies

Individu *infected* tidak melakukan travelling ke wilayah lain

Individu *infected* terisolasi saat dilintasan sehingga yang bergerak individu *susceptible*

Individu yang melakukan travelling ke wilayah lain akan menjadi individu wilayah tersebut.



# Tujuan Penelitian

Mengkonstruksi model epidemik SEIR penyebaran penyakit menular antar dua wilayah dengan melalui dua lintasan yang menghubungkan dua wilayah tersebut.

Mendapatkan rumus  $\mathcal{R}_0$  pada masing-masing wilayah dan  $\mathcal{R}_0$  pada lintasan yang menghubungkan dua wilayah tersebut.

Simulasi  $\mathcal{R}_0$  dari model tipe SEIR dengan menggunakan metode Runge – Kutta.

# Manfaat Penelitian

Mengetahui transmisi suatu penyakit dari individu terinfeksi antar dua wilayah melalui dua lintasan.

Mengetahui dinamika penyebaran per laju populasi dan berusaha mengurangi penyebaran penyakit dengan memperhatikan  $\mathcal{R}_0$ .

Sebagai referensi pemerintah untuk mencegah penyebaran penyakit pada waktu individu terinfeksi melakukan perjalanan



## II. Kajian Pustaka dan Dasar Teori

### Penelitian Terdahulu

1. Model epidemik multi-spesies (Julien Arinot dkk, 2005) yang mengkontruksi model matematika bertipe SEIR
2. Model epidemik pre-koalisi antara H1N1-p dan H5N1 ( Hariyanto dkk, 2013) yang mengkonstruksi model matematika bertipe SEIS.
3. Model penyebaran penyakit (Driessche dkk, 2002) yang mengkonstruksi model epidemik multi-infeksi, model epidemik dengan pengobatan, model multi-grup.
4. Model Epidemik antar dua wilayah ( Alan, E dkk, 2015) bertipe SITRS



## II. Kajian Pustaka dan Dasar Teori

### Sistem Dinamik



Model Epidemik Multi Spesies (Julien Arinot, 2005).

$$\begin{aligned}\frac{dS_{ip}}{dt} &= d_{ip}(N_{ip} - S_{ip}) - \sum_{j=1}^s \beta_{ijp} S_{ip} \frac{I_{jp}}{N_{jp}} + \sum_{q=1}^n m_{ipq} S_{iq} - \sum_{q=1}^n m_{iqp} S_{ip} \\ \frac{dE_{ip}}{dt} &= \sum_{j=1}^s \beta_{ijp} S_{ip} \frac{I_{jp}}{N_{jp}} - (d_{ip} + \varepsilon_{ip}) E_{ip} + \sum_{q=1}^n m_{ipq} E_{iq} - \sum_{q=1}^n m_{iqp} E_{ip} \\ \frac{dI_{ip}}{dt} &= \varepsilon_{ip} E_{ip} - (d_{ip} + \gamma_{ip}) I_{ip} + \sum_{q=1}^n m_{ipq} I_{iq} - \sum_{q=1}^n m_{iqp} I_{ip} \quad (2.1)\end{aligned}$$

$$\frac{dR_{ip}}{dt} = \gamma_{ip} I_{ip} - d_{ip} R_{ip} + \sum_{q=1}^n m_{ipq} R_{iq} - \sum_{q=1}^n m_{iqp} R_{ip}$$

dengan  $N_{ip} = S_{ip} + E_{ip} + I_{ip} + R_{ip}$ ,  $\frac{1}{d_{ip}} > 0$ ,

Diberikan kondisi awal yaitu

$$N_{ip}(0) = 50.000, \quad I_{ip}(0) = 50.$$

## II. Kajian Pustaka dan Dasar Teori



### Titik Setimbang

#### Definisi 2.1

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

Mempunyai solusi setimbang adalah titik  $x^* \in \mathbb{R}^n$  yang memenuhi  $f(x^*) = 0$  tidak berubah terhadap waktu atau konstan. Istilah lain untuk  $x^*$  adalah titik tetap, titik stasioner, titik tunggal, titik kritis (springer).



## II. Kajian Pustaka dan Dasar Teori

### Linierisasi

Sistem Dinamik  
Non Linier

Deret Taylor Disekitar Titik  
Setimbang

$$\begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \\ \frac{dR}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \end{bmatrix} (\bar{x}^*) \begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{E} \\ \dot{I} \\ \dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix}$$

(Boyce & Prima, 2009)

## II. Kajian Pustaka dan Dasar Teori

### Bilangan Reproduksi Dasar



Jika  $\mathcal{R}_0 < 1$  maka setiap individu yang terinfeksi memproduksi kurang dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi

jika  $\mathcal{R}_0 > 1$  maka individu yang terinfeksi memproduksi lebih dari satu individu terinfeksi baru.

jika  $\mathcal{R}_0 = 1$  maka terjadi bifurkasi yang dapat didefinisikan sebagai perubahan stabilitas yang diakibatkan oleh perubahan parameter.



# Lanjutan Bilangan Reproduksi Dasar 1

$\mathcal{F}_i(x)$  adalah laju dari kemunculan infeksi baru pada kompartemen  $i$

$\mathcal{V}_i^-(x)$  adalah laju dari perpindahan individu keluar dari kompartemen  $i$

$\mathcal{V}_i^+(x)$  adalah laju dari perpindahan individu masuk ke kompartemen  $i$

persamaan sistem sebagai berikut.

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n$$

dengan  $\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x)$

Memenuhi 5  
asumsi

didefinisikan sebagai berikut

$$F = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j} \right], V = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j} \right], \text{ dengan } 1 \leq i, j \leq m$$

Dengan  $F$  non negatif dan  $V$  merupakan M-matriks *non-singular*

# Lanjutan Bilangan Reproduksi Dasar 2

## Definisi 2.2

Matriks  $V$  merupakan M-matriks non singular jika dan hanya jika sebuah matriks  $V$  berukuran  $n \times n$  menunjukkan bentuk  $V = sI - B$ . Dimana  $s > \rho(B)$  maksimum modulus dari nilai eigen  $B$

(Berman & Plemmons, 1979,  $M_{35}$ , p. 127)



Matriks generasi selanjutnya adalah  $A = FV^{-1}$  dan angka reproduksi dasar dapat dituliskan sebagai

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \rho(A),$$

dengan  $\rho(A)$  adalah *spectral radius* dari matriks  $A$ , yaitu maksimum modulus nilai eigen dari matriks  $A$  (Driessche & Wetmough, 2002).



# Fungsi Lipschitz

Fungsi *lipschitz* dilakukan bertujuan untuk mengetahui bahwa model memiliki penyelesaian tunggal dan ada, selain itu sebagai representasi dari model yang dibangun berdasarkan fenomena pada objek pengamatan



Diberikan sistem dari masalah nilai awal yang berbetuk

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m), \\ \frac{du_2}{dt} &= f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m), \\ &\vdots \\ \frac{du_m}{dt} &= f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m).\end{aligned}$$

Untuk  $a \leq t \leq b$ , dengan kondisi awal

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m$$

# Lanjutan Fungsi Lipschitz 1

## Definisi 2.4

Fungsi  $f\{(t, u_1, u_2, \dots, u_m) | a \leq t \leq b \text{ dan } -\infty < u_i < \infty, \forall i = 1, 2, \dots, m\}$

Dikatakan memenuhi kondisi lipschitz di  $D$ , jika terdapat sebuah konstanta  $L > 0$

$$|f(t, u_1, u_2, \dots, u_m) - f(t, z_1, z_2, \dots, z_m)| \leq L \sum_{j=1}^m |u_j - z_j|$$

Untuk semua  $(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$  dan  $(t, z_1, z_2, \dots, z_m)$  di  $D$ .  
(Burden.L dkk, 2011 )



# Runge- Kutta

Misalkan  $\dot{S}(t), \dot{E}(t), \dot{I}(t), \dot{R}(t)$  sebagai berikut

$$\dot{S}(t) = f_1(t, S, E, I, R)$$

$$\dot{E}(t) = f_2(t, S, E, I, R)$$

$$\dot{I}(t) = f_3(t, S, E, I, R)$$

$$\dot{R}(t) = f_4(t, S, E, I, R)$$

Untuk Menghitung  $S_{n+1}, E_{n+1}, I_{n+1}, R_{n+1}$

Pertama hitung

$$k_{1,i} = h f_i(t_0, S_0, E_0, I_0, R_0) \text{ untuk } i = S, E, I, R$$

$$k_{2,i} = h f_i \left( t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{1}{2} k_{1,S}, E_0 + \frac{1}{2} k_{1,E}, I_0 + \frac{1}{2} k_{1,I}, R_0 + \frac{1}{2} k_{1,R} \right)$$

# Lanjutan Runge- Kutta 1

$$k_{3,i} = h f_i \left( t_0 + \frac{h}{2}, S_0 + \frac{1}{2} k_{2,S}, E_0 + \frac{1}{2} k_{2,E}, I_0 + \frac{1}{2} k_{2,I}, R_0 + \frac{1}{2} k_{2,R} \right)$$
$$k_{4,i} = h f_4(t_0 + h, S_0 + k_{3,S}, E_0 + k_{3,E}, I_0 + k_{3,I}, R_0 + k_{3,R})$$

Maka

$$S_{n+1} = S_0 + \frac{1}{6} (k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S})$$
$$E_{n+1} = E_0 + \frac{1}{6} (k_{1,E} + 2k_{2,E} + 2k_{3,E} + k_{4,E})$$
$$I_{n+1} = I_0 + \frac{1}{6} (k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I})$$
$$R_{n+1} = R_0 + \frac{1}{6} (k_{1,R} + 2k_{2,R} + 2k_{3,R} + k_{4,R})$$

Dengan  $h$  Adalah Ukuran Langkah (Burden.L Dkk, 2011 ).



### III. Metode Penelitian

#### 1. Studi Literatur

#### 2. Konstruksi Model

- a. Menentukan objek yang diamati yaitu wilayah yang terinfeksi virus.
- b. Mengidentifikasi masalah berdasarkan fenomena- fenomena
- c. Membangun model matematika

#### 3. Analisis Dinamik pada suatu sistem model epidemik SEIR

#### 4. Simulasi model

#### 5. Penyusunan Tesis

## IV. Pembahasan

### 4.1 Model Pada Wilayah Satu

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= \Lambda_1 - d_1 S_1 - \beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 - b_1 S_1 + b_2 S_2 \\ \frac{dE_1}{dt} &= \mu_1 \beta_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 - (d_1 + \gamma_1) E_1 - b_1 E_1 + b_2 E_2 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \gamma_1 E_1 - d_1 I_1 - \varphi_1 I_1 \\ \frac{dR_1}{dt} &= \varphi_1 I_1 - d_1 R_1 - b_1 R_1 + b_2 R_2\end{aligned}$$



Diasumsikan sebelumnya bahwa individu dari wilayah dua yang melakukan *travelling* ke wilayah satu menjadi populasi di wilayah satu  $s_2 \approx s_1$ . Misalkan  $\sigma_1$  adalah proporsi subpopulasi *susceptible* dari wilayah dua yang menjadi populasi di wilayah satu. Maka proporsi subpopulasi *susceptible* yang berasal dari wilayah dua yang melakukan *travelling* ke wilayah satu dan menjadi populasi di wilayah satu  $b_2 S_2$  adalah  $\sigma_1 S_1$ . Proporsi subpopulasi *exposed* yang berasal dari wilayah dua yang melakukan *travelling* ke wilayah satu dan menjadi populasi di wilayah satu  $b_2 E_2$  adalah  $\sigma_2 E_1$ . Proporsi subpopulasi *recovery* yang berasal dari wilayah dua yang melakukan *travelling* ke wilayah satu dan menjadi populasi di wilayah satu  $b_2 R_2$  adalah  $\sigma_3 R_1$ .



$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= \Lambda_1 - d_1 S_1 - \beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 - b_1 S_1 + \sigma_1 S_1 \\ \frac{dE_1}{dt} &= \mu_1 \beta_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 - (d_1 + \gamma_1) E_1 - b_1 E_1 + \sigma_2 E_1 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \gamma_1 E_1 - d_1 I_1 - \varphi_1 I_1 \\ \frac{dR_1}{dt} &= \varphi_1 I_1 - d_1 R_1 - b_1 R_1 + \sigma_3 R_1\end{aligned}\quad (4.1)$$

Dengan kondisi awal yaitu

$$S_1(0) = S_{1(0)}, E_1(0) = E_{1(0)}, I_1(0) = I_{1(0)}, R_1(0) = R_{1(0)},$$

dan kondisi batas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t) = S_{maks}, \quad \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} < 0, \quad I_1 \text{ bergerak hanya sampai dengan } L_1$$

Total populasi pada wilayah satu yaitu

$$N_1(t) = S_1(t) + E_1(t) + I_1(t) + R_1(t), \quad S_1(t), E_1(t), I_1(t), R_1(t) > 0$$

#### 4.1.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit Pada Model Wilayah Satu

Titik keseimbangan bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran virus dalam suatu populasi sehingga  $I_1 = 0$ .  
Titik keseimbangan bebas penyakit pada wilayah satu adalah

$$(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*) = \left( \frac{\Lambda_1}{(d_1 + b_1 - \sigma_1)}, 0, 0, 0 \right)$$

#### 4.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar Pada Model Wilayah Satu

$\mathcal{R}_0$  dari sistem (4.1) dapat dicari dengan mengasumsikan populasi dikelompokkan kedalam empat kompartemen. Diberikan  $x = (S_1, E_1, I_1, R_1)^T$  dengan  $S_1, E_1, I_1, R_1 \geq 0$  dan  $X_s$  adalah himpunan state yang tidak nol saat bebas penyakit dan didefinisikan sebagai berikut

$$X_s = \{S_1 > 0 | E_1 = 0, I_1 = 0, R_1 = 0\}$$

Model penyebaran penyakit memiliki kondisi awal non negatif dengan persamaan sistem sebagai berikut.

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n \text{ dengan } \mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x).$$

Dari sistem (4.1) didapatkan



$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \\ \mathcal{F}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V}_i^-(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1^- \\ \mathcal{V}_2^- \\ \mathcal{V}_3^- \\ \mathcal{V}_4^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_1 + d_1 + \gamma_1)E_1 \\ (d_1 + \varphi_1)I_1 \\ (d_1 + b_1)R_1 \\ (b_1 + d_1)S_1 \end{pmatrix}$$

Dengan persamaan sistem berdasarkan (Driessche & Wetmough, 2002) sebagai berikut.

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n \text{ dengan}$$

$$\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x)$$

$$\mathcal{V}_i^+(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1^+ \\ \mathcal{V}_2^+ \\ \mathcal{V}_3^+ \\ \mathcal{V}_4^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2 E_1 \\ \gamma_1 E_1 \\ \varphi_1 I_1 + \sigma_3 R_1 \\ \sigma_1 S_1 + \Lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} \beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$\mathcal{V}_i = \begin{pmatrix} (b_1 + d_1 + \gamma_1 - \sigma_2)E_1 \\ (d_1 + \varphi_1)I_1 - \gamma_1 E_1 \\ (d_1 + b_1 - \sigma_3)R_1 - \varphi_1 I_1 \\ (b_1 + d_1 - \sigma_1)S_1 - \Lambda_1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Persamaan 4.2 yang memenuhi asumsi - asumsi berikut (Driessche & Wetmough, 2002)

1. Jika  $S_1, E_1, I_1, R_1 \geq 0$ , maka  $\mathcal{F}_i(x), \mathcal{V}_i^-(x), \mathcal{V}_i^+(x) \geq 0$  untuk  $i = 1, \dots, 4$ .

Artinya individu pada subpopulasi *susceptible*, *exposed*, *infected*, dan *recovery* ada dan apabila terjadi kontak individu *susceptible* dengan individu *infected* maka dapat memunculkan individu *infected* baru dan mengakibatkan perubahan pada masing-masing subpopulasi.

2. Jika  $I_1, E_1 = 0$  maka  $\mathcal{V}_i^- = 0$ . Secara khusus, jika  $x \in X_s$ , maka  $\mathcal{V}_i^- = 0$  untuk  $i = 1, \dots, 4$ .

Artinya jika subpopulasi *infected* dan *exposed* kosong, maka tidak ada individu yang keluar dari kompartemen melalui infeksi dan kematian.

3.  $\mathcal{F}_i = 0$ , jika  $i > m$  dengan  $i = 4$  dan  $m = 2$ .

Artinya jika munculnya infeksi baru adalah nol maka subpopulasi  $E_1, I_1 = 0$



4. Jika  $x \in X_s$ , maka  $\mathcal{F}_i(x) = 0$  dan  $\mathcal{V}_i^+ = 0$  untuk  $i = 1, \dots, m$ .

Artinya jika populasi dalam keadaan bebas penyakit maka tidak muncul infeksi baru yang disebabkan oleh individu *infected* dan tidak ada perpindahan individu masuk menjadi subpopulasi *infected*.

$$E_1, I_1 = 0$$

5. Didefinisikan DFE adalah titik kesetimbangan bebas penyakit, dengan  $f$  terbatas ke  $X_s$ . Jika populasi ada disekitar DFE, maka populasi akan kembali ke DFE menurut linearisasi sistem:

$$\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0), \text{ dengan } Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Setelah memenuhi 5 asumsi maka persamaan (4.2) dapat diketahui bahwa populasi yang terinfeksi adalah  $E_1$  dan  $I_1$  maka  $m = 2$ .  
dengan menggunakan lemma 2.1 didapatkan

$$\mathcal{F}_1 = \beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 \text{ dan } \mathcal{F}_2 = 0, \text{ dengan } N_1 = S_1 + E_1 + I_1 + R_1$$

$$\mathcal{V}_1 = (b_1 + d_1 + \gamma_1 - \sigma_2)E_1 \text{ dan } \mathcal{V}_2 = (d_1 + \varphi_1)I_1 - \gamma_1 E_1$$

Maka didapatkan

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial E_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_1(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial I_1} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial E_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_2(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial I_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \mu_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



didapatkan matriks  $V$  adalah

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial E_1} & \frac{\partial \mathcal{V}_1(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial I_1} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial E_1} & \frac{\partial \mathcal{V}_2(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial I_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + d_1 + \gamma_1 - \sigma_2 & 0 \\ -\gamma_1 & d_1 + \varphi_1 \end{pmatrix}$$

dengan  $F$  non negatif dan  $V$  merupakan M-matriks *non-singular*. Telah dibuktikan bahwa  $V$  merupakan M-matriks *non-singular* dengan memenuhi definisi 2.2 (berman & plemmons, 1979,  $M_{35}$ , p. 127). Matriks  $V$  merupakan M-matriks non singular jika dan hanya jika sebuah matriks  $V$  berukuran  $2 \times 2$  menunjukkan bentuk  $V = sI - B$ . dimana  $s > \rho(B)$ ,  $\rho(B)$  maksimum modulus dari nilai eigen  $B$ , dengan  $s = \varphi_1 + (b_1 + d_1 + \gamma_1 - \sigma_2)$  dan  $B = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \gamma_1 & b_1 + \gamma_1 - \sigma_2 \end{pmatrix}$

Kemudian dibentuk matriks generasi selanjutnya yaitu

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 \beta_1 \mu_1}{(b_1 + d_1 + \gamma_1 - \sigma_2)(d_1 + \varphi_1)} & \frac{\beta_1 \mu_1}{(d_1 + \varphi_1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian dicari nilai eigen dari  $FV^{-1}$  sebagai berikut

$$|FV^{-1} - \lambda I| = 0$$

Didapatkan  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{\gamma_1 \beta_1 \mu_1}{(b_1 + d_1 + \gamma_1 - \sigma_2)(d_1 + \varphi_1)}$

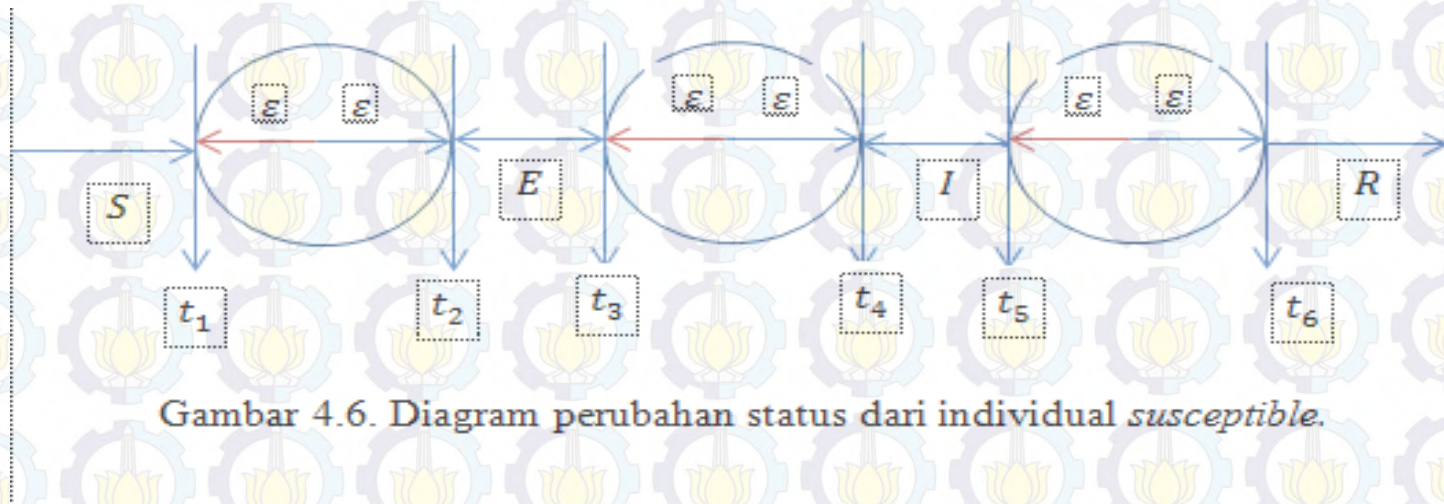
$$\mathcal{R}_{01} = \rho(FV^{-1}) = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \frac{\gamma_1 \beta_1 \mu_1}{(b_1 + d_1 + \gamma_1 - \sigma_2)(d_1 + \varphi_1)}$$



### 4.1.3 Eksistensi dan Ketunggalan Pada Model Wilayah Satu

Analisis ini bertujuan untuk mengetahui bahwa model memiliki penyelesaian tunggal dan ada. Selain itu sebagai representasi dari model yang dibangun berdasarkan fenomena pada objek pengamatan. Sebelum dilakukan analisis eksistensi dan ketunggalan dilakukan reduksi terlebih dahulu pada Sistem Persamaan (4.1)

Reduksi dilakukan dalam rangka untuk menekankan terjadinya evolusi model pada subpopulasi yang diamati. Berikut ini diagram yang menggambarkan perubahan status dari individual



Gambar 4.6. Diagram perubahan status dari individual *susceptible*.



$$\frac{dS_1}{dt} = \Lambda_1 - d_1 S_1 - \beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 - b_1 S_1 + \sigma_1 S_1$$

Pada waktu  $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$  maka interaksi yang terjadi antara individual *susceptible* dan individual *infected* akan menyebabkan perubahan status dari *susceptible* menjadi *exposed* atau tetap menjadi *susceptible*. Hal ini bergantung dengan kekebalan tubuh dari *susceptible*. Ambil sebarang  $t = \delta_1$  dimana  $t_1 < \delta_1 < t_2$  interaksi individual  $(s_j, i_j)$  untuk  $j = 1, 2, \dots, n$ . yang menyebabkan terjadinya perubahan secara proposional sebesar  $p_1$ , dimana  $0 < p_1 < 1$ .

Jika  $\varepsilon \rightarrow t_2$  maka individu  $(s_j, i_j) \approx e_k$  atau dapat dikatakan bahwa proporsi perubahan status yang disebabkan oleh transmisi virus dari populasi  $\beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1$  adalah  $p_1 E_1$  ekuivalen dengan  $(1 - p_1) S_1$ .

Jika  $\varepsilon \rightarrow t_1$  maka individu  $(s_j, i_j) \approx s_k$  atau dapat dikatakan bahwa proporsi perubahan status yang disebabkan oleh transmisi virus dari populasi  $\beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1$  adalah  $p_1 S_1$  ekuivalen dengan  $(1 - p_1) E_1$ .

Dengan demikian untuk setiap  $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$  terdapat transisi  $\beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1$  sebesar  $p_1 E_1$  dan  $(1 - p_1) S_1$  dimana  $0 < p_1 < 1$  sebagai proporsi artinya bahwa pada interval waktu tersebut terdapat individual  $s_{ki}$  yang diskontinu di  $t = \delta_1$  dan terdapat individu  $s_i$  yang kontinu sebagai individu *susceptible*.



$$\frac{dS_1}{dt} = \Lambda_1 - d_1 S_1 - \beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 - b_1 S_1 + \sigma_1 S_1$$

$$\frac{dS_1}{dt} = \Lambda_1 - d_1 S_1 - (1 - p_1) S_1 - b_1 S_1 + \sigma_1 S_1 \quad (4.3)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = q_1 I_1 - d_1 I_1 - \varphi_1 I_1$$

$$\frac{dI_1}{dt} = q_1 I_1 - d_1 I_1 - (1 - u_1) I_1 \quad (4.5)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = p_1 E_1 - (d_1 + \gamma_1) E_1 - b_1 E_1 + \sigma_2 E_1$$

$$\frac{dE_1}{dt} = p_1 E_1 - (d_1 + (1 - q_1)) E_1 - b_1 E_1 + \sigma_2 E_1 \quad (4.4)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \varphi_1 I_1 - d_1 R_1 - b_1 R_1 + \sigma_3 R_1$$

$$\frac{dR_1}{dt} = u_1 R_1 - d_1 R_1 - b_1 R_1 + \sigma_3 R_1 \quad (4.6)$$

Terdapat konstanta *Lipschitz*  $k(t)$  yang memenuhi

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq k(t)\|X^1 - X^2\|$$

sedemikian hingga model sistem berlaku untuk setiap  $t \in R$ .

Bukti :

Misalkan sistem berbentuk  $\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), t)$ ,  $X(0) = X_0$ , dengan  $X \in \mathbb{R}^4$  dan  $t \in \mathbb{R}^+$ .  
dengan  $X = \{S, E, I, R\} \in \mathbb{R}^4$  maka Persamaan (4.3), (4.4), (4.5) dan (4.6) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dS_1}{dt} = f(S_1(t), t); \frac{dE_1}{dt} = f(E_1(t), t); \frac{dI_1}{dt} = f(I_1(t), t); \frac{dR_1}{dt} = f(R_1(t), t)$$

Misalkan terdapat elemen-elemen pada himpunan  $X$  kontinu sebagian demi sebagian.

$$S_1 = (S_1^1, S_1^2), E_1 = (E_1^1, E_1^2), I_1 = (I_1^1, I_1^2), R_1 = (R_1^1, R_1^2)$$

maka akan terdapat  $f(X^1(t), t)$  dan  $f(X^2(t), t)$  dengan

$$X^1 = \{S_1^1, E_1^1, I_1^1, R_1^1\}$$

$$X^2 = \{S_1^2, E_1^2, I_1^2, R_1^2\}$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari  $k(t)$  yang merupakan konstanta *Lipschitz* yang memenuhi bentuk berikut

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq k(t)\|X^1 - X^2\|$$



$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| = \left\| \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} \right\| = \|b_{i1} + c_{i1}\| \quad (4.7)$$

atau  $\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\|$ , dengan  $\|b_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$

Dengan ketentuan  $a_{i1} \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\|$ .  $i = 1, 2, 3, 4$

### **Susceptible**

$$a_{11} = f(S_1^1(t), t) - f(S_1^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.7) maka didapatkan

$$\|a_{11}\| = \|(\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1)(S_1^1 - S_1^2)\| \quad (4.8)$$

### **Exposed**

$$a_{21} = f(E_1^1(t), t) - f(E_1^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.7) maka didapatkan

$$\|a_{21}\| = \|(p_1 - (d_1 + (1 - q_1)) - b_1 + \sigma_2)(E_1^1 - E_1^2)\| \quad (4.9)$$

### **Infected**

$$a_{31} = f(I_1^1(t), t) - f(I_1^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.7) maka didapatkan

$$\|a_{31}\| = \|(q_1 - d_1 - (1 - u_1))(I_1^1 - I_1^2)\| \quad (4.10)$$

### **Recovery**

$$a_{41} = f(R_1^1(t), t) - f(R_1^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.7) maka didapatkan

$$\|a_{41}\| = \|(u_1 - d_1 - b_1 + \sigma_3)(R_1^1 - R_1^2)\| \quad (4.11)$$

Selanjutnya Persamaan (4.8)-(4.11) dapat dibentuk norm sebagai berikut.

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{matrix} \right\| = \|b_{i1} + c_{i1}\|, \text{ dengan } \|b_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1)(S_1^1 - S_1^2) \\ (p_1 - (d_1 + (1 - q_1)) - b_1 + \sigma_2)(E_1^1 - E_1^2) \\ (q_1 - d_1 - (1 - u_1))(I_1^1 - I_1^2) \\ (u_1 - d_1 - b_1 + \sigma_3)(R_1^1 - R_1^2) \end{matrix} \right\|$$

atau

$$\|b_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$$

$$|a_{11}| = |(\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1)|(|S_1^1 - S_1^2|)$$

$$|a_{21}| = |(p_1 - (d_1 + (1 - q_1)) - b_1 + \sigma_2)|(|E_1^1 - E_1^2|)$$

$$|a_{31}| = |(q_1 - d_1 - (1 - u_1))|(|I_1^1 - I_1^2|)$$

$$|a_{41}| = |(u_1 - d_1 - b_1 + \sigma_3)|(|R_1^1 - R_1^2|)$$



maka

$$|a_{11}| \leq \max\{ |(\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1)|, |(p_1 - (d_1 + (1 - q_1))) - b_1 + \sigma_2|, |q_1 - d_1 - (1 - u_1)|, |u_1 - d_1 - b_1 + \sigma_3| \} (|S_1^1 - S_1^2|)$$

$$|a_{21}| \leq \max\{ |(\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1)|, |(p_1 - (d_1 + (1 - q_1))) - b_1 + \sigma_2|, |q_1 - d_1 - (1 - u_1)|, |u_1 - d_1 - b_1 + \sigma_3| \} (|E_1^1 - E_1^2|)$$

$$|a_{31}| \leq \max\{ |(\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1)|, |(p_1 - (d_1 + (1 - q_1))) - b_1 + \sigma_2|, |q_1 - d_1 - (1 - u_1)|, |u_1 - d_1 - b_1 + \sigma_3| \} (|I_1^1 - I_1^2|)$$

$$|a_{41}| \leq \max\{ |(\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1)|, |(p_1 - (d_1 + (1 - q_1))) - b_1 + \sigma_2|, |q_1 - d_1 - (1 - u_1)|, |u_1 - d_1 - b_1 + \sigma_3| \} (|R_1^1 - R_1^2|)$$

Atau

$$\left\| \begin{pmatrix} (\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1)(S_1^1 - S_1^2) \\ (p_1 - (d_1 + (1 - q_1))) - b_1 + \sigma_2(E_1^1 - E_1^2) \\ (q_1 - d_1 - (1 - u_1))(I_1^1 - I_1^2) \\ (u_1 - d_1 - b_1 + \sigma_3)(R_1^1 - R_1^2) \end{pmatrix} \right\| \leq k(t) \left\| \begin{pmatrix} (S_1^1 - S_1^2) \\ (E_1^1 - E_1^2) \\ (I_1^1 - I_1^2) \\ (R_1^1 - R_1^2) \end{pmatrix} \right\|$$

Untuk menentukan nilai maksimum mutlak dari

$$k(t) = \max\{ |\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1|, |p_1 - (d_1 + (1 - q_1))) - b_1 + \sigma_2|, |q_1 - d_1 - (1 - u_1)|, |u_1 - d_1 - b_1 + \sigma_3| \}$$

yang memiliki dua kemungkinan yaitu

$$\{ |(\sigma_1)_{maks} - (d_1 + (1 - p_1) + b_1)_{min}|, |(p_1 + \sigma_2)_{maks} - (d_1 + (1 - q_1) + b_1)_{min}|, |(q_1)_{maks} - (d_1 + (1 - u_1))_{min}|, |(u_1 + \sigma_3)_{maks} - (d_1 + b_1)_{min}| \}$$

Atau

$$\{ |(\sigma_1)_{min} - (d_1 + (1 - p_1) + b_1)_{maks}|, |(p_1 + \sigma_2)_{min} - (d_1 + (1 - q_1) + b_1)_{maks}|, |(q_1)_{min} - (d_1 + (1 - u_1))_{maks}|, |(u_1 + \sigma_3)_{min} - (d_1 + b_1)_{maks}| \}$$

$k(t) = |(q_1)_{maks} - (d_1 + (1 - u_1))_{min}|$  maka penyebaran virus dalam wilayah satu sangat luas. Jika  $(q_1)_{maks}$  dan  $(d_1 + (1 - u_1))_{min}$  maka yang terjadi *rate* transisi individu *exposed* yang menjadi individu *infected* lebih besar daripada *rate* kematian individu *infected* dan *rate* transisi individu *infected* yang sembuh sehingga memberikan pengaruh sangat besar pada perubahan subpopulasi  $S_1, E_1, I_1, R_1$  di wilayah satu.



## 4.2 Model Pada Wilayah Dua

$$\begin{aligned}\frac{dS_2}{dt} &= \Lambda_2 - d_2 S_2 - \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 - b_2 S_2 + b_1 S_1 \\ \frac{dE_2}{dt} &= \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 - (d_2 + \gamma_2) E_2 - b_2 E_2 + b_1 E_1 \\ \frac{dI_2}{dt} &= \gamma_2 E_2 - d_2 I_2 - \varphi_2 I_2 \\ \frac{dR_2}{dt} &= \varphi_2 I_2 - d_2 R_2 - b_2 R_2 + b_1 R_1\end{aligned}$$

kondisi batas

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} S_2(t) &= S_{maks} \\ \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} &< 0, I_2 \text{ bergerak hanya} \\ &\text{sampai dengan } L_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dS_2}{dt} &= \Lambda_2 - d_2 S_2 - \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 - b_2 S_2 + \sigma_4 S_2 \\ \frac{dE_2}{dt} &= \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 - (d_2 + \gamma_2) E_2 - b_2 E_2 + \sigma_5 E_2 \\ \frac{dI_2}{dt} &= \gamma_2 E_2 - d_2 I_2 - \varphi_2 I_2 \\ \frac{dR_2}{dt} &= \varphi_2 I_2 - d_2 R_2 - b_2 R_2 + \sigma_6 R_2\end{aligned} \quad (4.12)$$

Dengan nilai awal yaitu

$$\begin{aligned}S_2(0) &= S_{2(0)}, E_2(0) = E_{2(0)}, I_2(0) = I_{2(0)}, R_2(0) \\ &= R_{2(0)},\end{aligned}$$

#### 4.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit Pada Model Wilayah Dua

Titik keseimbangan bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran virus dalam suatu populasi sehingga  $I_2 = 0$ .  
Titik keseimbangan bebas penyakit pada wilayah dua adalah

$$(S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*) = \left( \frac{\Lambda_2}{(d_2 + b_2 - \sigma_4)}, 0, 0, 0 \right)$$

#### 4.2.2 Bilangan Reproduksi Dasar Pada Model Wilayah Dua

$\mathcal{R}_0$  dari sistem (4.12) dapat dicari dengan mengasumsikan populasi dikelompokkan kedalam empat kompartemen. Diberikan  $x = (S_2, E_2, I_2, R_2)^T$  dengan  $S_2, E_2, I_2, R_2 \geq 0$  dan  $X_s$  adalah himpunan state yang tidak nol saat bebas penyakit dan didefinisikan sebagai berikut

$$X_s = \{S_2 > 0 | E_2 = 0, I_2 = 0, R_2 = 0\}$$

Model penyebaran penyakit memiliki kondisi awal non negatif dengan persamaan sistem sebagai berikut.

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n \text{ dengan } \mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x).$$

Dari sistem (4.12) didapatkan



$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \\ \mathcal{F}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V}_i^-(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1^- \\ \mathcal{V}_2^- \\ \mathcal{V}_3^- \\ \mathcal{V}_4^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_2 + d_2 + \gamma_2)E_2 \\ (d_2 + \varphi_2)I_2 \\ (d_2 + b_2)R_2 \\ (b_2 + d_2)S_2 \end{pmatrix}$$

Dengan persamaan sistem berdasarkan (Driessche & Wetmough, 2002) sebagai berikut.

$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n$  dengan  
 $\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x)$

$$\mathcal{V}_i^+(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1^+ \\ \mathcal{V}_2^+ \\ \mathcal{V}_3^+ \\ \mathcal{V}_4^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_5 E_2 \\ \gamma_2 E_2 \\ \varphi_2 I_2 + \sigma_6 R_2 \\ \sigma_4 S_2 + \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_i = \begin{pmatrix} \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathcal{V}_i = \begin{pmatrix} (b_2 + d_2 + \gamma_2 - \sigma_5)E_2 \\ (d_2 + \varphi_2)I_2 - \gamma_2 E_2 \\ (d_2 + b_2 - \sigma_6)R_2 - \varphi_2 I_2 \\ (b_2 + d_2 - \sigma_4)S_2 - \Lambda_2 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Setelah memenuhi 5 asumsi maka persamaan (4.13) dapat diketahui bahwa populasi yang terinfeksi adalah  $E_2$  dan  $I_2$  maka  $m = 2$  dengan menggunakan lemma 2.1 didapatkan

$$\mathcal{F}_1 = \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 \text{ dan } \mathcal{F}_2 = 0, \text{ dengan } N_2 = S_2 + E_2 + I_2 + R_2$$

$$\mathcal{V}_1 = (b_2 + d_2 + \gamma_2 - \sigma_5) E_2 \text{ dan } \mathcal{V}_2 = (d_2 + \varphi_2) I_2 - \gamma_2 E_2$$

Maka matriks  $F$  adalah

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial E_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_1(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial E_2} & \frac{\partial \mathcal{F}_2(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \mu_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

didapatkan matriks  $V$  adalah

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial E_2} & \frac{\partial \mathcal{V}_1(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial E_2} & \frac{\partial \mathcal{V}_2(S^*, E^*, I^*, R^*)}{\partial I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 + d_2 + \gamma_2 - \sigma_5 & 0 \\ -\gamma_2 & d_2 + \varphi_2 \end{pmatrix}$$

dengan  $F$  non negatif dan  $V$  merupakan M-matriks *non-singular*.



Telah dibuktikan bahwa  $V$  merupakan M-matriks *non-singular* dengan memenuhi definisi 2.2 (berman & plemmons, 1979,  $M_{35}$ , p. 127). Matriks  $V$  merupakan m-matriks non singular jika dan hanya jika sebuah matriks  $V$  berukuran  $2 \times 2$  menunjukkan bentuk  $V = sI - B$ . dimana  $s > \rho(B)$ ,  $\rho(B)$  maksimum modulus dari nilai eigen  $B$ , dengan

$$s = \varphi_2 + (b_2 + d_2 + \gamma_2 - \sigma_5) \text{ dan } B = \begin{pmatrix} \varphi_2 & 0 \\ \gamma_2 & b_2 + \gamma_2 - \sigma_5 \end{pmatrix}.$$

Kemudian dibentuk matriks generasi selanjutnya yaitu

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_2 \beta_2 \mu_2}{(b_2 + d_2 + \gamma_2 - \sigma_5)(d_2 + \varphi_2)} & \frac{\beta_2 \mu_2}{(d_2 + \varphi_2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian dicari nilai eigen dari  $FV^{-1}$  sebagai berikut

$$|FV^{-1} - \lambda I| = 0$$

Didapatkan  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{\gamma_2 \beta_2 \mu_2}{(b_2 + d_2 + \gamma_2 - \sigma_5)(d_2 + \varphi_2)}$

$$\mathcal{R}_{01} = \rho(FV^{-1}) = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \frac{\gamma_2 \beta_2 \mu_2}{(b_2 + d_2 + \gamma_2 - \sigma_5)(d_2 + \varphi_2)}$$

### 4.1.3 Eksistensi dan Ketunggalan Pada Model Wilayah Satu

$$\frac{dS_2}{dt} = \Lambda_2 - d_2 S_2 - \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 - b_2 S_2 + \sigma_4 S_2$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \Lambda_2 - d_2 S_2 - (1 - p_2) S_2 - b_2 S_2 + \sigma_4 S_2 \quad (4.14)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = p_2 E_2 - (d_2 + \gamma_2) E_2 - b_2 E_2 + \sigma_5 E_2$$

$$\frac{dE_2}{dt} = p_2 E_2 - (d_2 + (1 - q_2)) E_2 - b_2 E_2 + \sigma_5 E_2 \quad (4.15)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = q_2 I_2 - d_2 I_2 - \varphi_2 I_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = q_2 I_2 - d_2 I_2 - (1 - u_2) I_2 \quad (4.16)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \varphi_2 I_2 - d_2 R_2 - b_2 R_2 + \sigma_6 R_2$$

$$\frac{dR_2}{dt} = u_2 R_2 - d_2 R_2 - b_2 R_2 + \sigma_6 R_2 \quad (4.17)$$



Terdapat konstanta *Lipschitz*  $k(t)$  yang memenuhi

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq k(t)\|X^1 - X^2\|$$

sedemikian hingga model sistem berlaku untuk setiap  $t \in R$ .

Bukti :

Misalkan sistem berbentuk  $\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), t)$ ,  $X(0) = X_0$ , dengan  $X \in \mathbb{R}^4$  dan  $t \in \mathbb{R}^+$ .  
dengan  $X = \{S, E, I, R\} \in \mathbb{R}^4$  maka Persamaan (4.14), (4.15), (4.16) dan (4.17) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dS_2}{dt} = f(S_2(t), t); \frac{dE_2}{dt} = f(E_2(t), t); \frac{dI_2}{dt} = f(I_2(t), t); \frac{dR_2}{dt} = f(R_2(t), t)$$

Misalkan terdapat elemen-elemen pada himpunan  $X$  kontinu sebagian demi sebagian.

$$S_2 = (S_2^1, S_2^2), E_2 = (E_2^1, E_2^2), I_2 = (I_2^1, I_2^2), R_2 = (R_2^1, R_2^2)$$

maka akan terdapat  $f(X^1(t), t)$  dan  $f(X^2(t), t)$  dengan

$$X^1 = \{S_2^1, E_2^1, I_2^1, R_2^1\}$$

$$X^2 = \{S_2^2, E_2^2, I_2^2, R_2^2\}$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari  $k(t)$  yang merupakan konstanta *Lipschitz* yang memenuhi bentuk berikut

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq k(t)\|X^1 - X^2\|$$



$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{vmatrix} = \|b_{i1} + c_{i1}\| \quad (4.18)$$

atau  $\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\|$ , dengan  $\|b_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$

Dengan ketentuan  $a_{i1} \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\|$ .  $i = 1, 2, 3, 4$

### **Susceptible**

$$a_{11} = f(S_2^1(t), t) - f(S_2^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.18) maka didapatkan

$$\|a_{11}\| = \|(\sigma_4 - d_2 - (1 - p_2) - b_2)(S_2^1 - S_2^2)\| \quad (4.19)$$

### **Exposed**

$$a_{21} = f(E_2^1(t), t) - f(E_2^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.18) maka didapatkan

$$\|a_{21}\| = \|(p_2 - (d_2 + (1 - q_2)) - b_2 + \sigma_5)(E_2^1 - E_2^2)\| \quad (4.20)$$

### **Infected**

$$a_{31} = f(I_2^1(t), t) - f(I_2^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.18) maka didapatkan

$$\|a_{31}\| = \|(q_2 - d_2 - (1 - u_2))(I_2^1 - I_2^2)\| \quad (4.21)$$

### **Recovery**

$$a_{41} = f(R_2^1(t), t) - f(R_2^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.7) maka didapatkan

$$\|a_{41}\| = \|(u_2 - d_2 - b_2 + \sigma_6)(R_2^1 - R_2^2)\| \quad (4.22)$$



Selanjutnya Persamaan (4.19)-(4.22) dapat dibentuk norm sebagai berikut.

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{matrix} \right\| = \|b_{i1} + c_{i1}\|, \text{ dengan } \|b_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (\sigma_4 - d_2 - (1 - p_2) - b_2)(S_2^1 - S_2^2) \\ (p_2 - (d_2 + (1 - q_2)) - b_2 + \sigma_5)(E_2^1 - E_2^2) \\ (q_2 - d_2 - (1 - u_2))(I_2^1 - I_2^2) \\ (u_2 - d_2 - b_2 + \sigma_6)(R_2^1 - R_2^2) \end{matrix} \right\|$$

atau

$$\|b_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$$

$$|a_{11}| = |(\sigma_4 - d_2 - (1 - p_2) - b_2)|(|S_2^1 - S_2^2|)$$

$$|a_{21}| = |(p_2 - (d_2 + (1 - q_2)) - b_2 + \sigma_5)|(|E_2^1 - E_2^2|)$$

$$|a_{31}| = |(q_2 - d_2 - (1 - u_2))|(|I_2^1 - I_2^2|)$$

$$|a_{41}| = |(u_2 - d_2 - b_2 + \sigma_6)|(|R_2^1 - R_2^2|)$$

maka

$$|a_{11}| \leq \max\{ |(\sigma_4 - d_2 - (1 - p_2) - b_2)|, |p_2 - (d_2 + (1 - q_2)) - b_2 + \sigma_5|, |q_2 - d_2 - (1 - u_2)|, |u_2 - d_2 - b_2 + \sigma_6| \} (|S_2^1 - S_2^2|)$$

$$|a_{21}| \leq \max\{ |(\sigma_4 - d_2 - (1 - p_2) - b_2)|, |p_2 - (d_2 + (1 - q_2)) - b_2 + \sigma_5|, |q_2 - d_2 - (1 - u_2)|, |u_2 - d_2 - b_2 + \sigma_6| \} (|E_2^1 - E_2^2|)$$

$$|a_{31}| \leq \max\{ |(\sigma_4 - d_2 - (1 - p_2) - b_2)|, |p_2 - (d_2 + (1 - q_2)) - b_2 + \sigma_5|, |q_2 - d_2 - (1 - u_2)|, |u_2 - d_2 - b_2 + \sigma_6| \} (|I_2^1 - I_2^2|)$$

$$|a_{41}| \leq \max\{ |(\sigma_4 - d_2 - (1 - p_2) - b_2)|, |p_2 - (d_2 + (1 - q_2)) - b_2 + \sigma_5|, |q_2 - d_2 - (1 - u_2)|, |u_2 - d_2 - b_2 + \sigma_6| \} (|R_2^1 - R_2^2|)$$

atau

$$\left\| \begin{pmatrix} (\sigma_4 - d_2 - (1 - p_2) - b_2)(S_2^1 - S_2^2) \\ (p_2 - (d_2 + (1 - q_2)) - b_2 + \sigma_5)(E_2^1 - E_2^2) \\ (q_2 - d_2 - (1 - u_2))(I_2^1 - I_2^2) \\ (u_2 - d_2 - b_2 + \sigma_6)(R_2^1 - R_2^2) \end{pmatrix} \right\| \leq k(t) \left\| \begin{pmatrix} (S_2^1 - S_2^2) \\ (E_2^1 - E_2^2) \\ (I_2^1 - I_2^2) \\ (R_2^1 - R_2^2) \end{pmatrix} \right\|$$

Untuk menentukan nilai maksimum mutlak dari

$$k(t) = \max\{ |\sigma_1 - d_1 - (1 - p_1) - b_1|, |p_1 - (d_1 + (1 - q_1)) - b_1 + \sigma_2|, |q_2 - d_2 - (1 - u_2)|, |u_2 - d_2 - b_2 + \sigma_6| \}$$



yang memiliki dua kemungkinan yaitu

$$\{ |(\sigma_4)_{maks} - (d_2 + (1 - p_2) + b_2)_{min}|, |(p_2 + \sigma_5)_{maks} - (d_2 + (1 - q_2) + b_2)_{min}|, |(q_2)_{maks} - (d_2 + (1 - u_2))_{min}|, |(u_2 + \sigma_6)_{maks} - (d_2 + b_2)_{min}| \}$$

Atau

$$\{ |(\sigma_4)_{min} - (d_2 + (1 - p_2) + b_2)_{maks}|, |(p_2 + \sigma_5)_{min} - (d_2 + (1 - q_2) + b_2)_{maks}|, |(q_2)_{min} - (d_2 + (1 - u_2))_{maks}|, |(u_2 + \sigma_6)_{min} - (d_2 + b_2)_{maks}| \}$$

$k(t) = |(q_2)_{maks} - (d_2 + (1 - u_2))_{min}|$  maka penyebaran virus dalam wilayah dua sangat luas. Jika  $(q_2)_{maks}$  dan  $(d_2 + (1 - u_2))_{min}$  maka yang terjadi *rate* individu *exposed* yang menjadi individu *infected* lebih besar daripada *rate* kematian individu *infected* dan *rate* individu *infected* yang sembuh sehingga memberikan pengaruh sangat besar pada perubahan subpopulasi  $S_2, E_2, I_2, R_2$  di wilayah dua.

### 4.3 Model Pada Lintasan

$$\begin{aligned}\frac{d(S_{ik})_j}{dt} &= (d_{ik})_j(N_{ik})_j - (d_{ik})_j(S_{ik})_j - \sum_{p=1}^2 \beta_i \mu_i \frac{(S_{ik})_j}{(N_{ik})_j} (I_{pq})_j + \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{pj} (S_{ik})_p \\ &\quad - \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{jp} (S_{ik})_j \\ \frac{d(E_{ik})_j}{dt} &= \sum_{p=1}^2 \beta_i \mu_i \frac{(S_{ik})_j}{(N_{ik})_j} (I_{pq})_j - (d_{ik})_j(E_{ik})_j - (\gamma_{ik})_j(E_{ik})_j + \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{pj} (E_{ik})_p \\ &\quad - \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{jp} (E_{ik})_j \\ \frac{d(I_{ik})_j}{dt} &= (\gamma_{ik})_j(E_{ik})_j - (d_{ik})_j(I_{ik})_j - (\varphi_{ik})_j(I_{ik})_j \\ \frac{d(R_{ik})_j}{dt} &= (\varphi_{ik})_j(I_{ik})_j - (d_{ik})_j(R_{ik})_j + \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{pj} (R_{ik})_p - \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{jp} (R_{ik})_j\end{aligned}\quad (4.23)$$

dengan  $i \neq k, p \neq q$

$(S_{ik})_j(0) = S_{(ik)j(0)}, (E_{ik})_j(0) = E_{(ik)j(0)}, (I_{ik})_j(0) = I_{(ik)j(0)}, (R_{ik})_j(0) = R_{(ik)j(0)}$

kondisi batas

$\lim_{t \rightarrow \infty} (S_{ik})_j(t) = S_{maks}, \frac{\partial^2 (I_{ik})_j}{\partial x^2} < 0, (I_{ik})_j$  tidak bergerak atau diisolasi di lintasan



$$\frac{d(N_{ik})_j}{dt} = \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{pj} \left( (S_{ik})_p + (E_{ik})_p + (R_{ik})_p \right) - \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{jp} \left( (S_{ik})_j + (E_{ik})_j + (R_{ik})_j \right) \quad (4.24)$$

dengan  $i = 1, 2, j = 1, 2$ , dan  $k = 1, 2$   
dengan

$$N_j = ((N_{12})_1, (N_{12})_2, (N_{21})_1, (N_{21})_2)^T$$

dan

$$S_j = ((S_{12})_1, (S_{12})_2, (S_{21})_1, (S_{21})_2)^T$$

$$E_j = ((E_{12})_1, (E_{12})_2, (E_{21})_1, (E_{21})_2)^T$$

$$R_j = ((R_{12})_1, (R_{12})_2, (R_{21})_1, (R_{21})_2)^T$$

maka Persamaan (4.24) dapat dibentuk kedalam matriks sebagai berikut

$$\frac{dN_j}{dt} = \begin{bmatrix} -(b_{12})_{12} & (b_{12})_{21} & 0 & 0 \\ (b_{12})_{12} & -(b_{12})_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(b_{21})_{12} & (b_{21})_{21} \\ 0 & 0 & (b_{21})_{12} & -(b_{21})_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (S_{12})_1 + (E_{12})_1 + (R_{12})_1 \\ (S_{12})_2 + (E_{12})_2 + (R_{12})_2 \\ (S_{21})_1 + (E_{21})_1 + (R_{21})_1 \\ (S_{21})_2 + (E_{21})_2 + (R_{21})_2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

dengan memisalkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} -(b_{12})_{12} & (b_{12})_{21} & 0 & 0 \\ (b_{12})_{12} & -(b_{12})_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(b_{21})_{12} & (b_{21})_{21} \\ 0 & 0 & (b_{21})_{12} & -(b_{21})_{21} \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah matriks singular, maka

$$\frac{dN_j}{dt} = 0 \text{ atau } \frac{d(N_{ik})_j}{dt} = 0$$



### 4.3.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit Pada Lintasan

Titik keseimbangan bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran virus dalam suatu populasi sehingga  $(I_{ik})_j, (I_{pq})_j = 0$ .

Titik keseimbangan bebas penyakit pada lintasan adalah

$$\left( \left( (S_{ik})_j \right)^*, \left( (E_{ik})_j \right)^*, \left( (I_{ik})_j \right)^*, \left( (R_{ik})_j \right)^* \right) = \left( \frac{\sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{pj}}{\sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{jp}} (S_{ik})_p, 0, 0, 0 \right)$$

### 4.3.2 Bilangan Reproduksi Dasar Pada Lintasan

$\mathcal{R}_0$  dari sistem (4.23) dapat dicari dengan mengasumsikan populasi dikelompokkan kedalam empat kompartemen.  $x = \left( (S_{ik})_j, (E_{ik})_j, (I_{ik})_j, (R_{ik})_j \right)^T$  dengan  $i = 1, 2, j = 1, 2$  dan  $k = 1, 2$  dan  $(S_{ik})_j, (E_{ik})_j, (I_{ik})_j, (R_{ik})_j \geq 0$ . Diberikan  $X_S$  adalah himpunan state yang tidak nol saat bebas penyakit dan didefinisikan sebagai berikut

$$X_S = \{ (S_{ik})_j > 0 \mid (E_{ik})_j = 0, (I_{ik})_j = 0, (R_{ik})_j = 0 \}$$

model penyebaran penyakit memiliki kondisi awal non negatif dengan persamaan sistem sebagai berikut.

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, \dots, n \text{ dengan } \mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x).$$

Dari sistem (4.23) didapatkan

$$\mathcal{F}_i = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{10}, \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{14}, \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{16})^T$$



Selain itu, dari sistem (4.23) didapatkan

$$\mathcal{V}_i^-(x) = (\mathcal{V}_1^-, \mathcal{V}_2^-, \mathcal{V}_3^-, \mathcal{V}_4^-, \mathcal{V}_5^-, \mathcal{V}_6^-, \mathcal{V}_7^-, \mathcal{V}_8^-, \mathcal{V}_9^-, \mathcal{V}_{10}^-, \mathcal{V}_{11}^-, \mathcal{V}_{12}^-, \mathcal{V}_{13}^-, \mathcal{V}_{14}^-, \mathcal{V}_{15}^-, \mathcal{V}_{16}^-)^T$$

dan

$$\mathcal{V}_i^+(x) = (\mathcal{V}_1^+, \mathcal{V}_2^+, \mathcal{V}_3^+, \mathcal{V}_4^+, \mathcal{V}_5^+, \mathcal{V}_6^+, \mathcal{V}_7^+, \mathcal{V}_8^+, \mathcal{V}_9^+, \mathcal{V}_{10}^+, \mathcal{V}_{11}^+, \mathcal{V}_{12}^+, \mathcal{V}_{13}^+, \mathcal{V}_{14}^+, \mathcal{V}_{15}^+, \mathcal{V}_{16}^+)^T$$

Dengan urutan

$$(E_{12})_1, (E_{12})_2, (E_{21})_1, (E_{21})_2, (I_{12})_1, (I_{12})_2, (I_{21})_1, (I_{21})_2, (R_{12})_1, (R_{12})_2, (R_{21})_1, (R_{21})_2, (S_{12})_1, (S_{12})_2, (S_{21})_1, (S_{21})_2.$$

$\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^-(x), \mathcal{V}_i^+(x)$  telah memenuhi asumsi - asumsi analog dengan model wilayah satu (Driessche & Wetmough, 2002). Sehingga dapat diketahui bahwa populasi yang terinfeksi adalah  $(E_{ik})_j$  dan  $(I_{ik})_j$  maka  $m = 8$ . dengan titik setimbang  $(E_{ik})_j = 0, (I_{ik})_j = 0$ . Menggunakan Lemma 2.1 didapatkan matriks  $F$  dan  $V$  dengan melakukan urutan linierisasi sebagai berikut

$$(E_{12})_1, (E_{12})_2, (E_{21})_1, (E_{21})_2, (I_{12})_1, (I_{12})_2, (I_{21})_1, (I_{21})_2$$

Matriks  $F$  dan  $V$  dipartisi menjadi matriks 4x4 sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} 0 & : & E \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & : & 0 \end{bmatrix} \text{ and } V = \begin{bmatrix} A & : & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -C & : & D \end{bmatrix}$$

Dengan  $C = \text{matrix } \text{diag}(\gamma_{ik})_j$ ,  $D = \text{matrix } \text{diag}((d_{ik})_j + (\varphi_{ik})_j)$



dengan  $F$  non negatif dan  $V$  merupakan M-matriks *non-singular*. Telah dibuktikan bahwa  $V$  merupakan M-matriks *non-singular* dengan memenuhi definisi 2.2 (berman & plemmons, 1979,  $M_{35}$ , p. 127). Matriks  $V$  merupakan M-matriks non singular jika dan hanya jika sebuah matriks  $V$  berukuran  $8 \times 8$  menunjukkan bentuk  $V = sI - B$ . dimana  $s > \rho(B)$ ,  $\rho(B)$  maksimum modulus dari nilai eigen  $B$ , dengan

$$s = \sum_{\substack{j,p=1 \\ j \neq p}}^2 \left( (d_{12})_j + (\gamma_{12})_j + (b_{12})_{jp} \right) + \sum_{j=1}^2 \left( (d_{12})_j + (\varphi_{12})_j \right) + \sum_{\substack{j,p=1 \\ j \neq p}}^2 \left( (d_{21})_j + (\gamma_{21})_j + (b_{21})_{jp} \right) + \sum_{j=1}^2 \left( (d_{21})_j + (\varphi_{21})_j \right)$$

$$\text{dan } B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_9 & B_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{19} & B_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{27} & B_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{33} & 0 & 0 & 0 & B_{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{42} & 0 & 0 & 0 & B_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{51} & 0 & 0 & 0 & B_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{60} & 0 & 0 & 0 & B_{64} \end{bmatrix}$$



Didapatkan matriks  $V^{-1}$  sebagai berikut

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ D^{-1}C A^{-1} & \vdots & D^{-1} \end{bmatrix}$$

Kemudian dibentuk matriks generasi selanjutnya yaitu

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} ED^{-1}C A^{-1} & \vdots & ED^{-1} \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai eigen dari  $FV^{-1}$  sebagai berikut

$$|FV^{-1} - \lambda I| = 0$$

$$\mathcal{R}_{03} = \rho(FV^{-1}) = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|, |\lambda_5|, |\lambda_6|, |\lambda_7|, |\lambda_8|\}$$

$$= \max \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2a} \right\}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2a}$$

Dengan  $b = - \left( \frac{\sum_{j \neq p}^2 \left( ((d_{12})_j + (\gamma_{12})_j + (b_{12})_{jp}) ((d_{12})_j + (\varphi_{12})_j) (\gamma_{12})_p \right)}{(w) \left( \prod_{j=1}^2 (d_{12})_j + (\varphi_{12})_j \right)} \right) \beta_1 \mu_1$

$- \left( \frac{\sum_{j \neq p}^2 \left( ((d_{21})_j + (\gamma_{21})_j + (b_{21})_{jp}) ((d_{21})_j + (\varphi_{21})_j) (\gamma_{21})_p \right)}{(z) \left( \prod_{j=1}^2 (d_{21})_j + (\varphi_{21})_j \right)} \right) \beta_2 \mu_2$

$$\begin{aligned}
 c = & \frac{\prod_{j,p=1}^2 (\gamma_{12})_p \left( \prod_{j,p=1}^2 \left( (d_{12})_j + (\gamma_{12})_j + (b_{12})_{jp} \right) - \prod_{j,p=1}^2 (b_{12})_{jp} \right) \beta_1^2 \mu_1^2}{(w)^2 \left( \prod_{j=1}^2 (d_{12})_j + (\varphi_{12})_j \right)} + \\
 & \frac{\prod_{j,p=1}^2 (\gamma_{21})_p \left( \prod_{j,p=1}^2 \left( (d_{21})_j + (\gamma_{21})_j + (b_{21})_{jp} \right) - \prod_{j,p=1}^2 (b_{21})_{jp} \right) \beta_2^2 \mu_2^2}{(z)^2 \left( \prod_{j=1}^2 (d_{21})_j + (\varphi_{21})_j \right)} + \\
 & \frac{\prod_{i,k=1}^2 (\gamma_{ik})_i \left( \prod_{i,k=1}^2 \left( (d_{ik})_k + (\gamma_{ik})_k + (b_{ik})_{ki} \right) - \prod_{i,k=1}^2 (b_{ik})_{ki} \right) \beta_1 \beta_2 \mu_1 \mu_2}{(z)(w) \left( \prod_{i,k=1}^2 (d_{ik})_i + (\varphi_{ik})_i \right)} + \\
 & \frac{\prod_{i,k=1}^2 (\gamma_{ik})_k \left( \prod_{i,k=1}^2 \left( (d_{ik})_i + (\gamma_{ik})_i + (b_{ik})_{ik} \right) - \prod_{i,k=1}^2 (b_{ik})_{ik} \right) \beta_1 \beta_2 \mu_1 \mu_2}{(z)(w) \left( \prod_{i,k=1}^2 (d_{ik})_k + (\varphi_{ik})_k \right)} \\
 (w) = & \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^2 \left( (d_{12})_j + (\gamma_{12})_j + (b_{12})_{jk} \right) - (b_{12})_{21} (b_{12})_{12} \\
 (z) = & \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^2 \left( (d_{21})_j + (\gamma_{21})_j + (b_{21})_{jk} \right) - (b_{21})_{21} (b_{21})_{12}
 \end{aligned}$$



### 4.3.3 Eksistensi dan Ketunggalan Pada Lintasan

Terdapat konstanta *Lipschitz*  $k(t)$  yang memenuhi

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq k(t)\|X^1 - X^2\|$$

sedemikian hingga model sistem berlaku untuk setiap  $t \in R$ .

Bukti :

Misalkan sistem berbentuk  $\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), t)$ ,  $X(0) = X_0$ , dan  $t \in \mathbb{R}^+$ . dengan  $X = \{S, E, I, R\} \in \mathbb{R}^4$  maka persamaan dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{d(S_{12})_1}{dt} &= f((S_{12})_1(t), t); \frac{d(S_{12})_2}{dt} = f((S_{12})_2(t), t); \frac{d(S_{21})_1}{dt} = f((S_{21})_1(t), t); \\ \frac{d(S_{21})_2}{dt} &= f((S_{21})_2(t), t); \frac{d(E_{12})_1}{dt} = f((E_{12})_1(t), t); \frac{d(E_{12})_2}{dt} = f((E_{12})_2(t), t); \\ \frac{d(E_{21})_1}{dt} &= f((E_{21})_1(t), t); \frac{d(E_{21})_2}{dt} = f((E_{21})_2(t), t); \frac{d(I_{12})_1}{dt} = f((I_{12})_1(t), t); \\ \frac{d(I_{12})_2}{dt} &= f((I_{12})_2(t), t); \frac{d(I_{21})_1}{dt} = f((I_{21})_1(t), t); \frac{d(I_{21})_2}{dt} = f((I_{21})_2(t), t); \\ \frac{d(R_{12})_1}{dt} &= f((R_{12})_1(t), t); \frac{d(R_{12})_2}{dt} = f((R_{12})_2(t), t); \frac{d(R_{21})_1}{dt} = f((R_{21})_1(t), t); \\ &\frac{d(R_{21})_2}{dt} = f((R_{21})_2(t), t); \end{aligned}$$



Selanjutnya dikelompokkan berdasarkan keadaan individu dilintasan menjadi empat total subpopulasi yaitu subpopulasi *susceptible*, *exposed*, *infected*, *recovery* di lintasan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f(S(t), t) &= f((S_{12})_1(t), t) + f((S_{12})_2(t), t) + f((S_{21})_1(t), t) + f((S_{21})_2(t), t) \\
 f(E(t), t) &= f((E_{12})_1(t), t) + f((E_{12})_2(t), t) + f((E_{21})_1(t), t) + f((E_{21})_2(t), t) \\
 f(I(t), t) &= f((I_{12})_1(t), t) + f((I_{12})_2(t), t) + f((I_{21})_1(t), t) + f((I_{21})_2(t), t) \\
 f(R(t), t) &= f((R_{12})_1(t), t) + f((R_{12})_2(t), t) + f((R_{21})_1(t), t) + f((R_{21})_2(t), t)
 \end{aligned}$$

maka akan terdapat  $f(X^1(t), t)$  dan  $f(X^2(t), t)$  dengan

$$\begin{aligned}
 X^1 &= \{ (S_{12})_1^1, (S_{12})_2^1, (S_{21})_1^1, (S_{21})_2^1, (E_{12})_1^1, (E_{12})_2^1, (E_{21})_1^1, (E_{21})_2^1, \\
 &\quad (I_{12})_1^1, (I_{12})_2^1, (I_{21})_1^1, (I_{21})_2^1, (R_{12})_1^1, (R_{12})_2^1, (R_{21})_1^1, (R_{21})_2^1 \} \\
 X^2 &= \{ (S_{12})_1^2, (S_{12})_2^2, (S_{21})_1^2, (S_{21})_2^2, (E_{12})_1^2, (E_{12})_2^2, (E_{21})_1^2, (E_{21})_2^2, \\
 &\quad (I_{12})_1^2, (I_{12})_2^2, (I_{21})_1^2, (I_{21})_2^2, (R_{12})_1^2, (R_{12})_2^2, (R_{21})_1^2, (R_{21})_2^2 \}
 \end{aligned}$$



Selanjutnya akan dicari nilai dari  $k(t)$  yang merupakan konstanta *Lipschitz* yang memenuhi bentuk berikut

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq k(t) \|X^1 - X^2\|$$

dengan

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| = \left\| \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} \right\| = \|b_{i1} + c_{i1} + d_{i1} + e_{i1}\|$$

atau

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\| + \|d_{i1}\| + \|e_{i1}\|$$

dengan  $\|b_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$

Berikut ketentuan  $a_{i1} \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\| + \|d_{i1}\| + \|e_{i1}\|$  (4.24)

### **Susceptible**

$$a_{11} = f(S^1(t), t) - f(S^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.24) maka didapatkan

$$\begin{aligned} \|a_{11}\| \leq & \|(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (1 - (p_{12})_1) - (1 - (q_{12})_1))((S_{12})_1^1 - (S_{12})_1^2)\| + \\ & \|(\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - (1 - (p_{12})_2) - (1 - (q_{12})_2))((s_{12})_2^1 - (s_{12})_2^2)\| + \\ & \|(\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 - (1 - (p_{21})_1) - (1 - (q_{21})_1))((S_{21})_1^1 - (S_{21})_1^2)\| + \\ & \|(\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} - (1 - (p_{21})_2) - (1 - (q_{21})_2))((S_{21})_2^1 - (S_{21})_2^2)\| \end{aligned} \quad (4.25)$$

## Exposed

$$a_{21} = f(E^1(t), t) - f(E^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.24) maka didapatkan

$$\begin{aligned} \|a_{21}\| \leq & \|((p_{12})_1 + (q_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (r_{12})_1))((E_{12})_1^1 - (E_{12})_1^2)\| + \\ & \|((p_{12})_2 + (q_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (r_{12})_2))((E_{12})_2^1 - (E_{12})_2^2)\| + \\ & \|((p_{21})_1 + (q_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (r_{21})_1))((E_{21})_1^1 - (E_{21})_1^2)\| + \\ & \|((p_{21})_2 + (q_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (r_{21})_2))((E_{21})_2^1 - (E_{21})_2^2)\| \end{aligned} \quad (4.26)$$

## Infected

$$a_{31} = f(I^1(t), t) - f(I^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.24) maka didapatkan

$$\begin{aligned} \|a_{31}\| \leq & \|((r_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (u_{12})_1))((I_{12})_1^1 - (I_{12})_1^2)\| + \\ & \|((r_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2))((I_{12})_2^1 - (I_{12})_2^2)\| + \\ & \|((r_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (u_{21})_1))((I_{21})_1^1 - (I_{21})_1^2)\| + \\ & \|((r_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (u_{21})_2))((I_{21})_2^1 - (I_{21})_2^2)\| \end{aligned} \quad (4.27)$$

## Recovery

$$a_{41} = f(R^1(t), t) - f(R^2(t), t)$$

Menggunakan ketentuan (4.24) maka didapatkan

$$\begin{aligned} \|a_{41}\| \leq & \|((u_{12})_1 - (d_{12})_1)((R_{12})_1^1 - (R_{12})_1^2)\| + \\ & \|((u_{12})_2 - (d_{12})_2)((R_{12})_2^1 - (R_{12})_2^2)\| + \\ & \|((u_{21})_1 - (d_{21})_1)((R_{21})_1^1 - (R_{21})_1^2)\| + \\ & \|((u_{21})_2 - (d_{21})_2)((R_{21})_2^1 - (R_{21})_2^2)\| \end{aligned} \quad (4.28)$$



Selanjutnya Persamaan (4.25) – (4.28) dapat dibentuk norm sebagai berikut.

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| = \left\| \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} \right\| = \|b_{i1} + c_{i1} + d_{i1} + e_{i1}\|$$

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\| + \|d_{i1}\| + \|e_{i1}\|, \text{ maka}$$

Sehingga

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq k_1(t)\|b_{i1}\| + k_2(t)\|c_{i1}\| + k_3(t)\|d_{i1}\| + k_4(t)\|e_{i1}\|$$

Dengan

1.  $k_1(t)$  merupakan konstanta *Lipschitz* subpopulasi dari wilayah satu menuju wilayah dua melalui lintasan satu, dengan

$$\|b_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$$

$$|b_{11}| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (1 - (p_{12})_1) - (1 - (q_{12})_1)|(|(S_{12})_1^1 - (S_{12})_1^2|)$$

$$|b_{21}| = |(p_{12})_1 + (q_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (r_{12})_1)|(|(E_{12})_1^1 - (E_{12})_1^2|)$$

$$|b_{31}| = |(r_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (u_{12})_1)|(|(I_{12})_1^1 - (I_{12})_1^2|)$$

$$|b_{41}| = |(u_{12})_1 - (d_{12})_1|(|(R_{12})_1^1 - (R_{12})_1^2|)$$

Maka

$$|b_{11}| \leq \max\{|\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (1 - (p_{12})_1) - (1 - (q_{12})_1)|, |(p_{12})_1 + (q_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (r_{12})_1)|, |(r_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (u_{12})_1)|, |(u_{12})_1 - (d_{12})_1|\} (|(S_{12})_1^1 - (S_{12})_1^2|)$$

$$|b_{21}| \leq \max\{|\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (1 - (p_{12})_1) - (1 - (q_{12})_1)|, |(p_{12})_1 + (q_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (r_{12})_1)|, |(r_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (u_{12})_1)|, |(u_{12})_1 - (d_{12})_1|\} (|(E_{12})_1^1 - (E_{12})_1^2|)$$

$$|b_{31}| \leq \max\{|\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (1 - (p_{12})_1) - (1 - (q_{12})_1)|, |(p_{12})_1 + (q_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (r_{12})_1)|, |(r_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (u_{12})_1)|, |(u_{12})_1 - (d_{12})_1|\} (|(I_{12})_1^1 - (I_{12})_1^2|)$$

$$|b_{41}| \leq \max\{|\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (1 - (p_{12})_1) - (1 - (q_{12})_1)|, |(p_{12})_1 + (q_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (r_{12})_1)|, |(r_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (u_{12})_1)|, |(u_{12})_1 - (d_{12})_1|\} (|(R_{12})_1^1 - (R_{12})_1^2|)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (1 - (p_{12})_1) - (1 - (q_{12})_1))((S_{12})_1^1 - (S_{12})_1^2) \\ ((p_{12})_1 + (q_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (r_{12})_1))((E_{12})_1^1 - (E_{12})_1^2) \\ ((r_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (u_{12})_1))((I_{12})_1^1 - (I_{12})_1^2) \\ ((u_{12})_1 - (d_{12})_1)((R_{12})_1^1 - (R_{12})_1^2) \end{pmatrix} \right\| \leq k_1(t) \left\| \begin{pmatrix} ((S_{12})_1^1 - (S_{12})_1^2) \\ ((E_{12})_1^1 - (E_{12})_1^2) \\ ((I_{12})_1^1 - (I_{12})_1^2) \\ ((R_{12})_1^1 - (R_{12})_1^2) \end{pmatrix} \right\|$$

$$k_1(t) = \max\{|\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (1 - (p_{12})_1) - (1 - (q_{12})_1)|, |(p_{12})_1 + (q_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (r_{12})_1)|, |(r_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (u_{12})_1)|, |(u_{12})_1 - (d_{12})_1|\}$$



yang memiliki dua kemungkinan yaitu

$$\left\{ \left| (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)_{maks} - ((1 - (p_{12})_1) + (1 - (q_{12})_1))_{min} \right|, \left| ((p_{12})_1 + (q_{12})_1)_{maks} - ((d_{12})_1 + (1 - (r_{12})_1))_{min} \right|, \left| ((r_{12})_1)_{maks} - ((d_{12})_1 + (1 - (u_{12})_1))_{min} \right|, \left| ((u_{12})_1)_{maks} - ((d_{12})_1)_{min} \right| \right\}$$

Atau

$$\left\{ \left| (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)_{min} - ((1 - (p_{12})_1) + (1 - (q_{12})_1))_{maks} \right|, \left| ((p_{12})_1 + (q_{12})_1)_{min} - ((d_{12})_1 + (1 - (r_{12})_1))_{maks} \right|, \left| ((r_{12})_1)_{min} - ((d_{12})_1 + (1 - (u_{12})_1))_{maks} \right|, \left| ((u_{12})_1)_{min} - ((d_{12})_1)_{maks} \right| \right\}$$

konstanta *Lipschitz*  $k_1(t) = \left| ((r_{12})_1)_{maks} - ((d_{12})_1 + (1 - (u_{12})_1))_{min} \right|$  maka penyebaran virus di lintasan satu sangat luas. Jika  $((r_{12})_1)_{maks}$  dan  $((d_{12})_1 + (1 - (u_{12})_1))_{min}$  maka yang terjadi *rate* transisi individu *exposed* menjadi individu *infected* lebih besar daripada *rate* kematian individu *infected* dan *rate* individu *infected* yang sembuh sehingga memberikan pengaruh sangat besar pada perubahan subpopulasi  $(S_{12})_1, (E_{12})_1, (I_{12})_1, (R_{12})_1$  di lintasan satu.

2.  $k_2(t)$  merupakan konstanta *Lipschitz* subpopulasi dari wilayah satu menuju wilayah dua melalui lintasan dua, dengan

$$\|c_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}|$$

$$|c_{11}| = |\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - (1 - (p_{12})_2) - (1 - (q_{12})_2)|(|(s_{12})_2^1 - (s_{12})_2^2|)$$

$$|c_{21}| = |(p_{12})_2 + (q_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (r_{12})_2)|(|(E_{12})_2^1 - (E_{12})_2^2|)$$

$$|c_{31}| = |(r_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2)|(|(I_{12})_2^1 - (I_{12})_2^2|)$$

$$|c_{41}| = |(u_{12})_2 - (d_{12})_2|(|(R_{12})_2^1 - (R_{12})_2^2|)$$

maka

$$|c_{11}| \leq \max\{|\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - (1 - (p_{12})_2) - (1 - (q_{12})_2)|, |(p_{12})_2 + (q_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (r_{12})_2)|, |(r_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2)|, |(u_{12})_2 - (d_{12})_2|\}(|(s_{12})_2^1 - (s_{12})_2^2|)$$

$$|c_{21}| \leq \max\{|\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - (1 - (p_{12})_2) - (1 - (q_{12})_2)|, |(p_{12})_2 + (q_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (r_{12})_2)|, |(r_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2)|, |(u_{12})_2 - (d_{12})_2|\}(|(E_{12})_2^1 - (E_{12})_2^2|)$$

$$|c_{31}| \leq \max\{|\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - (1 - (p_{12})_2) - (1 - (q_{12})_2)|, |(p_{12})_2 + (q_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (r_{12})_2)|, |(r_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2)|, |(u_{12})_2 - (d_{12})_2|\}(|(I_{12})_2^1 - (I_{12})_2^2|)$$

$$|c_{41}| \leq \max\{|\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - (1 - (p_{12})_2) - (1 - (q_{12})_2)|, |(p_{12})_2 + (q_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (r_{12})_2)|, |(r_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2)|, |(u_{12})_2 - (d_{12})_2|\}(|(R_{12})_2^1 - (R_{12})_2^2|)$$



$$\left\| \begin{pmatrix} (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - (1 - (p_{12})_2) - (1 - (q_{12})_2))((s_{12})_2^1 - (s_{12})_2^2) \\ ((p_{12})_2 + (q_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (r_{12})_2))((E_{12})_2^1 - (E_{12})_2^2) \\ ((r_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2))((I_{12})_2^1 - (I_{12})_2^2) \\ ((u_{12})_2 - (d_{12})_2)((R_{12})_2^1 - (R_{12})_2^2) \end{pmatrix} \right\| \leq k_2(t) \left\| \begin{pmatrix} ((s_{12})_2^1 - (s_{12})_2^2) \\ ((E_{12})_2^1 - (E_{12})_2^2) \\ ((I_{12})_2^1 - (I_{12})_2^2) \\ ((R_{12})_2^1 - (R_{12})_2^2) \end{pmatrix} \right\|$$

$k_2(t) = \max\{|\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - (1 - (p_{12})_2) - (1 - (q_{12})_2)|, |((p_{12})_2 + (q_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (r_{12})_2))|, |(r_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2)|, |(u_{12})_2 - (d_{12})_2|\}$   
yang memiliki dua kemungkinan yaitu

$$\left\{ \left| (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)_{\max} - ((1 - (p_{12})_2) + (1 - (q_{12})_2))_{\min} \right|, \left| ((p_{12})_2 + (q_{12})_2)_{\max} - ((d_{12})_2 + (1 - (r_{12})_2))_{\min} \right|, \left| ((r_{12})_2)_{\max} - ((d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2))_{\min} \right|, \left| ((u_{12})_2)_{\max} - ((d_{12})_2)_{\min} \right| \right\}$$

atau

$$\left\{ \left| (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)_{\min} - ((1 - (p_{12})_2) + (1 - (q_{12})_2))_{\max} \right|, \left| ((p_{12})_2 + (q_{12})_2)_{\min} - ((d_{12})_2 + (1 - (r_{12})_2))_{\max} \right|, \left| ((r_{12})_2)_{\min} - ((d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2))_{\max} \right|, \left| ((u_{12})_2)_{\min} - ((d_{12})_2)_{\max} \right| \right\}$$

$k_2(t) = \left| ((r_{12})_2)_{maks} - ((d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2))_{min} \right|$  maka penyebaran virus di lintasan dua sangat luas. Jika  $((r_{12})_2)_{maks}$  dan  $((d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2))_{min}$  maka yang terjadi *rate* transisi individu *exposed* menjadi individu *infected* lebih besar daripada *rate* kematian individu *infected* dan *rate* individu *infected* yang sembuh sehingga memberikan pengaruh sangat besar pada perubahan subpopulasi  $(S_{12})_2, (E_{12})_2, (I_{12})_2, (R_{12})_2$  di lintasan dua.

3.  $k_3(t)$  merupakan konstanta *Lipschitz* subpopulasi dari wilayah dua menuju wilayah satu melalui lintasan satu, dengan

$$\|d_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |d_{ij}|$$

$$|d_{11}| = |\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 - (1 - (p_{21})_1) - (1 - (q_{21})_1)| (|(S_{21})_1^1 - (S_{21})_1^2|)$$

$$|d_{21}| = |(p_{21})_1 + (q_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (r_{21})_1)| (|(E_{21})_1^1 - (E_{21})_1^2|)$$

$$|d_{31}| = |(r_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (u_{21})_1)| (|(I_{21})_1^1 - (I_{21})_1^2|)$$

$$|d_{41}| = |(u_{21})_1 - (d_{21})_1| (|(R_{21})_1^1 - (R_{21})_1^2|)$$



maka

$$|d_{11}| \leq \max\{|\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 - (1 - (p_{21})_1) - (1 - (q_{21})_1)|, |(p_{21})_1 + (q_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (r_{21})_1)|, |(r_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (u_{21})_1)|, |(u_{21})_1 - (d_{21})_1|\}(|(S_{21})_1^1 - (S_{21})_1^2|)$$

$$|d_{21}| \leq \max\{|\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 - (1 - (p_{21})_1) - (1 - (q_{21})_1)|, |(p_{21})_1 + (q_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (r_{21})_1)|, |(r_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (u_{21})_1)|, |(u_{21})_1 - (d_{21})_1|\}(|(E_{21})_1^1 - (E_{21})_1^2|)$$

$$|d_{31}| \leq \max\{|\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 - (1 - (p_{21})_1) - (1 - (q_{21})_1)|, |(p_{21})_1 + (q_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (r_{21})_1)|, |(r_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (u_{21})_1)|, |(u_{21})_1 - (d_{21})_1|\}(|(I_{21})_1^1 - (I_{21})_1^2|)$$

$$|d_{41}| \leq \max\{|\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 - (1 - (p_{21})_1) - (1 - (q_{21})_1)|, |(p_{21})_1 + (q_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (r_{21})_1)|, |(r_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (u_{21})_1)|, |(u_{21})_1 - (d_{21})_1|\}(|(R_{21})_1^1 - (R_{21})_1^2|)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} (\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 - (1 - (p_{21})_1) - (1 - (q_{21})_1))((S_{21})_1^1 - (S_{21})_1^2) \\ ((p_{21})_1 + (q_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (r_{21})_1))((E_{21})_1^1 - (E_{21})_1^2) \\ ((r_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (u_{21})_1))((I_{21})_1^1 - (I_{21})_1^2) \\ ((u_{21})_1 - (d_{21})_1)((R_{21})_1^1 - (R_{21})_1^2) \end{pmatrix} \right\| \leq k_3(t) \left\| \begin{pmatrix} ((S_{21})_1^1 - (S_{21})_1^2) \\ ((E_{21})_1^1 - (E_{21})_1^2) \\ ((I_{21})_1^1 - (I_{21})_1^2) \\ ((R_{21})_1^1 - (R_{21})_1^2) \end{pmatrix} \right\|$$

$$k_3(t) = \max\{|\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 - (1 - (p_{21})_1) - (1 - (q_{21})_1)|, |(p_{21})_1 + (q_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (r_{21})_1)|, |(r_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (u_{21})_1)|, |(u_{21})_1 - (d_{21})_1|\}$$

yang memiliki dua kemungkinan yaitu

$$\left\{ \left| (\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9)_{maks} - ((1 - (p_{21})_1) + (1 - (q_{21})_1))_{min} \right|, \left| ((p_{21})_1 + (q_{21})_1)_{maks} - ((d_{21})_1 + (1 - (r_{21})_1))_{min} \right|, \left| ((r_{21})_1)_{maks} - ((d_{21})_1 + (1 - (u_{21})_1))_{min} \right|, \left| ((u_{21})_1)_{maks} - ((d_{21})_1)_{min} \right| \right\}$$

Atau

$$\left\{ \left| (\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9)_{min} - ((1 - (p_{21})_1) + (1 - (q_{21})_1))_{maks} \right|, \left| ((p_{21})_1 + (q_{21})_1)_{min} - ((d_{21})_1 + (1 - (r_{21})_1))_{maks} \right|, \left| ((r_{21})_1)_{min} - ((d_{21})_1 + (1 - (u_{21})_1))_{maks} \right|, \left| ((u_{21})_1)_{min} - ((d_{21})_1)_{maks} \right| \right\}$$

$k_3(t) = \left| ((r_{21})_1)_{maks} - ((d_{21})_1 + (1 - (u_{21})_1))_{min} \right|$  maka penyebaran virus di lintasan satu sangat luas. Jika  $((r_{21})_1)_{maks}$  dan  $((d_{21})_1 + (1 - (u_{21})_1))_{min}$  maka yang terjadi *rate* individu *exposed* yang menjadi individu *infected* lebih besar daripada *rate* kematian individu *infected* dan *rate* individu *infected* yang sembuh sehingga memberikan pengaruh sangat besar pada perubahan subpopulasi  $(S_{21})_1, (E_{21})_1, (I_{21})_1, (R_{21})_1$  di lintasan satu.



4.  $k_4(t)$  merupakan konstanta *Lipschitz* subpopulasi dari wilayah dua menuju wilayah satu melalui lintasan dua, dengan

$$\|e_{i1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |e_{ij}|$$

$$|e_{11}| = |\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} - (1 - (p_{21})_2) - (1 - (q_{21})_2)|(|(S_{21})_2^1 - (S_{21})_2^2|)$$

$$|e_{21}| = |(p_{21})_2 + (q_{21})_2 - (d_{21})_{21} - (1 - (r_{21})_2)|(|(E_{21})_2^1 - (E_{21})_2^2|)$$

$$|e_{31}| = |(r_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (u_{21})_2)|(|(I_{21})_2^1 - (I_{21})_2^2|)$$

$$|e_{41}| = |(u_{21})_2 - (d_{21})_2|(|(R_{21})_2^1 - (R_{21})_2^2|)$$

Maka

$$|e_{11}| \leq \max\{|\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} - (1 - (p_{21})_2) - (1 - (q_{21})_2)|, |(p_{21})_2 + (q_{21})_2 - (d_{21})_{21} - (1 - (r_{21})_2)|, |(r_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (u_{21})_2)|, |(u_{21})_2 - (d_{21})_2|\}(|(S_{21})_2^1 - (S_{21})_2^2|)$$

$$|e_{21}| \leq \max\{|\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} - (1 - (p_{21})_2) - (1 - (q_{21})_2)|, |(p_{21})_2 + (q_{21})_2 - (d_{21})_{21} - (1 - (r_{21})_2)|, |(r_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (u_{21})_2)|, |(u_{21})_2 - (d_{21})_2|\}(|(E_{21})_2^1 - (E_{21})_2^2|)$$

$$|e_{31}| \leq \max\{|\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} - (1 - (p_{21})_2) - (1 - (q_{21})_2)|, |(p_{21})_2 + (q_{21})_2 - (d_{21})_{21} - (1 - (r_{21})_2)|, |(r_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (u_{21})_2)|, |(u_{21})_2 - (d_{21})_2|\}(|(I_{21})_2^1 - (I_{21})_2^2|)$$

$$|e_{41}| \leq \max\{|\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} - (1 - (p_{21})_2) - (1 - (q_{21})_2)|, |(p_{21})_2 + (q_{21})_2 - (d_{21})_{21} - (1 - (r_{21})_2)|, |(r_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (u_{21})_2)|, |(u_{21})_2 - (d_{21})_2|\}(|(R_{21})_2^1 - (R_{21})_2^2|)$$



$$\left\| \begin{pmatrix} (\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} - (1 - (p_{21})_2) - (1 - (q_{21})_2))((S_{21})_2^1 - (S_{21})_2^2) \\ ((p_{21})_2 + (q_{21})_2 - (d_{21})_{21} - (1 - (r_{21})_2))((E_{21})_2^1 - (E_{21})_2^2) \\ ((r_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (u_{21})_2))((I_{21})_2^1 - (I_{21})_2^2) \\ ((u_{21})_2 - (d_{21})_2)((R_{21})_2^1 - (R_{21})_2^2) \end{pmatrix} \right\| \leq k_4(t) \left\| \begin{pmatrix} ((S_{21})_2^1 - (S_{21})_2^2) \\ ((E_{21})_2^1 - (E_{21})_2^2) \\ ((I_{21})_2^1 - (I_{21})_2^2) \\ ((R_{21})_2^1 - (R_{21})_2^2) \end{pmatrix} \right\|$$

$k_4(t) = \max\{|\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} - (1 - (p_{21})_2) - (1 - (q_{21})_2)|, |(p_{21})_2 + (q_{21})_2 - (d_{21})_{21} - (1 - (r_{21})_2)|, |(r_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (u_{21})_2)|, |(u_{21})_2 - (d_{21})_2|\}$   
yang memiliki dua kemungkinan yaitu

$$\left\{ \left| (\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12})_{maks} - ((1 - (p_{21})_2) + (1 - (q_{21})_2))_{min} \right|, \left| ((p_{21})_2 + (q_{21})_2)_{maks} - ((d_{21})_{21} + (1 - (r_{21})_2))_{min} \right|, \left| ((r_{21})_2)_{maks} - ((d_{21})_2 + (1 - (u_{21})_2))_{min} \right|, \left| ((u_{21})_2)_{maks} - ((d_{21})_2)_{min} \right| \right\}$$

Atau

$$\left\{ \left| (\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12})_{maks} - ((1 - (p_{21})_2) + (1 - (q_{21})_2))_{min} \right|, \left| ((p_{21})_2 + (q_{21})_2)_{maks} - ((d_{21})_{21} + (1 - (r_{21})_2))_{min} \right|, \left| ((r_{21})_2)_{maks} - ((d_{21})_2 + (1 - (u_{21})_2))_{min} \right|, \left| ((u_{21})_2)_{maks} - ((d_{21})_2)_{min} \right| \right\}$$

$k_4(t) = \left| ((r_{21})_2)_{maks} - ((d_{21})_2 + (1 - (u_{21})_2))_{min} \right|$  maka penyebaran virus di lintasan dua sangat luas. Jika  $((r_{21})_2)_{maks}$  dan  $((d_{21})_2 + (1 - (u_{21})_2))_{min}$  maka yang terjadi *rate* transisi individu *exposed* menjadi individu *infected* lebih besar daripada *rate* kematian individu *infected* dan *rate* individu *infected* yang sembuh sehingga memberikan pengaruh sangat besar pada perubahan subpopulasi  $(S_{21})_2, (E_{21})_2, (I_{21})_2, (R_{21})_2$  di lintasan dua.



$$\begin{aligned}
 & \left\| \begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (1 - (p_{12})_1) - (1 - (q_{12})_1))((S_{12})_1^1 - (S_{12})_1^2) \\ & ((p_{12})_1 + (q_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (r_{12})_1))((E_{12})_1^1 - (E_{12})_1^2) \\ & ((r_{12})_1 - (d_{12})_1 - (1 - (u_{12})_1))((I_{12})_1^1 - (I_{12})_1^2) \\ & ((u_{12})_1 - (d_{12})_1)((R_{12})_1^1 - (R_{12})_1^2) \end{aligned} \right. \\
 & + \left\| \begin{aligned} & (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - (1 - (p_{12})_2) - (1 - (q_{12})_2))((S_{12})_2^1 - (S_{12})_2^2) \\ & ((p_{12})_2 + (q_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (r_{12})_2))((E_{12})_2^1 - (E_{12})_2^2) \\ & ((r_{12})_2 - (d_{12})_2 - (1 - (u_{12})_2))((I_{12})_2^1 - (I_{12})_2^2) \\ & ((u_{12})_2 - (d_{12})_2)((R_{12})_2^1 - (R_{12})_2^2) \end{aligned} \right. \\
 & + \left\| \begin{aligned} & (\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 - (1 - (p_{21})_1) - (1 - (q_{21})_1))((S_{21})_1^1 - (S_{21})_1^2) \\ & ((p_{21})_1 + (q_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (r_{21})_1))((E_{21})_1^1 - (E_{21})_1^2) \\ & ((r_{21})_1 - (d_{21})_1 - (1 - (u_{21})_1))((I_{21})_1^1 - (I_{21})_1^2) \\ & ((u_{21})_1 - (d_{21})_1)((R_{21})_1^1 - (R_{21})_1^2) \end{aligned} \right. \\
 & + \left\| \begin{aligned} & (\lambda_{10} + \lambda_{11} + \lambda_{12} - (1 - (p_{21})_2) - (1 - (q_{21})_2))((S_{21})_2^1 - (S_{21})_2^2) \\ & ((p_{21})_2 + (q_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (r_{21})_2))((E_{21})_2^1 - (E_{21})_2^2) \\ & ((r_{21})_2 - (d_{21})_2 - (1 - (u_{21})_2))((I_{21})_2^1 - (I_{21})_2^2) \\ & ((u_{21})_2 - (d_{21})_2)((R_{21})_2^1 - (R_{21})_2^2) \end{aligned} \right. \leq k_1(t) \left\| \begin{aligned} & ((S_{12})_1^1 - (S_{12})_1^2) \\ & ((E_{12})_1^1 - (E_{12})_1^2) \\ & ((I_{12})_1^1 - (I_{12})_1^2) \\ & ((R_{12})_1^1 - (R_{12})_1^2) \end{aligned} \right\| + k_2(t) \\
 & \left\| \begin{aligned} & ((S_{12})_2^1 - (S_{12})_2^2) \\ & ((E_{12})_2^1 - (E_{12})_2^2) \\ & ((I_{12})_2^1 - (I_{12})_2^2) \\ & ((R_{12})_2^1 - (R_{12})_2^2) \end{aligned} \right\| + k_3(t) \left\| \begin{aligned} & ((S_{21})_1^1 - (S_{21})_1^2) \\ & ((E_{21})_1^1 - (E_{21})_1^2) \\ & ((I_{21})_1^1 - (I_{21})_1^2) \\ & ((R_{21})_1^1 - (R_{21})_1^2) \end{aligned} \right\| + k_4(t) \left\| \begin{aligned} & ((S_{21})_2^1 - (S_{21})_2^2) \\ & ((E_{21})_2^1 - (E_{21})_2^2) \\ & ((I_{21})_2^1 - (I_{21})_2^2) \\ & ((R_{21})_2^1 - (R_{21})_2^2) \end{aligned} \right\|
 \end{aligned}$$

Dengan

$$k_1(t) = \left| ((r_{12})_1)_{maks} - ((d_{12})_1 + (1 - (u_{12})_1))_{min} \right|, k_2(t) = \left| ((r_{12})_2)_{maks} - ((d_{12})_2 + (1 - (u_{12})_2))_{min} \right|$$

$$k_3(t) = \left| ((r_{21})_1)_{maks} - ((d_{21})_1 + (1 - (u_{21})_1))_{min} \right|, k_4(t) = \left| ((r_{21})_2)_{maks} - ((d_{21})_2 + (1 - (u_{21})_2))_{min} \right|$$

## 4. Simulasi dan Analisis

Simulasi dilakukan hanya untuk menunjukkan jika terjadi penyebaran dua wilayah yang melalui dua lintasan, sehingga dapat mempermudah menganalisa sistem dan mengetahui aliran virus berdasarkan bilangan reproduksi dasar yang telah didapatkan. Selain itu untuk mengetahui keadaan lintasan

- ketika  $\mathcal{R}_{0_2} > 1$  di wilayah dua dan  $\mathcal{R}_{0_1} > 1$  di wilayah satu,
- ketika  $\mathcal{R}_{0_2} > 1$  di wilayah dua dan  $\mathcal{R}_{0_1} < 1$  di wilayah satu,
- ketika  $\mathcal{R}_{0_2} < 1$  di wilayah dua dan  $\mathcal{R}_{0_1} < 1$  di wilayah satu.

Nilai parameter yang digunakan pada wilayah satu untuk penyakit influenza khususnya SARS merujuk pada (Julian Arinot dkk,2005).



## 4. Simulasi dan Analisis

Tabel 4.1 Nilai parameter pada wilayah satu dan dua

Parameter	wilayah satu	Parameter	wilayah dua
$\Lambda_1$	1	$\Lambda_2$	1
$d_1$	0.013	$d_2$	0.014
$\mu_1$	1	$\mu_2$	1
$\beta_1$	0.5076	$\beta_2$	0.99
$\gamma_1$	0.85	$\gamma_2$	0.99
$\varphi_1$	0.4	$\varphi_2$	0.003
$\sigma_1$	0.04	$b_2$	0.05
$\sigma_2$	0.03	$\sigma_4$	0.01
$\sigma_3$	0.02	$\sigma_5$	0.07
$b_1$	0.03	$\sigma_6$	0.01

Tabel 4.2 Nilai awal dari masing-masing subpopulasi pada wilayah satu dan dua

Subpopulasi pada $t = 0$	wilayah satu $i = 1$	wilayah dua $i = 2$
$S_i$	1.3	1.5
$E_i$	1.2	1.3
$I_i$	1.25	1.35
$R_i$	1	1.2

## 4. Simulasi dan Analisis

Tabel 4.3 Nilai parameter pada lintasan

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
$(d_{12})_1$	0.01	$(d_{21})_1$	0.014
$(d_{12})_2$	0.01	$(d_{21})_2$	0.014
$(\gamma_{12})_1$	0.85	$(\gamma_{21})_1$	0.99
$(\gamma_{12})_2$	0.85	$(\gamma_{21})_2$	0.99
$\beta_1$	0.50	$\beta_2$	0.99
$\mu_1$	1	$\mu_2$	1
$(\varphi_{12})_1$	0.4	$(\varphi_{21})_1$	0.003
$(\varphi_{12})_2$	0.4	$(\varphi_{21})_2$	0.003
$(b_{12})_{12}$	0.01	$(b_{21})_{12}$	0.02
$(b_{12})_{21}$	0.02	$(b_{21})_{21}$	0.03

Tabel 4.4 Nilai awal dari masing-masing subpopulasi pada lintasan

Subpopulasi pada $t = 0$	Nilai awal	Subpopulasi pada $t = 0$	Nilai awal
$(S_{12})_1$	1.3	$(S_{21})_1$	1.5
$(S_{12})_2$	1.3	$(S_{21})_2$	1.5
$(E_{12})_1$	1.2	$(E_{21})_1$	1.3
$(E_{12})_2$	1.2	$(E_{21})_2$	1.3
$(I_{12})_1$	1.25	$(I_{21})_1$	1.35
$(I_{12})_2$	1.25	$(I_{21})_2$	1.35
$(R_{12})_1$	1	$(R_{21})_1$	1.2
$(R_{12})_2$	1	$(R_{21})_2$	1.2



## 4. Simulasi dan Analisis

### A. Ketika $1 < \mathcal{R}_{0_1} < \mathcal{R}_{0_2} < \mathcal{R}_{0_3}$

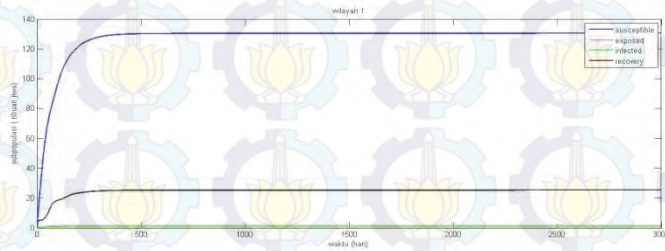


Figure 3.1 wilayah satu  $\mathcal{R}_{0_1} = 1,2105 > 1$

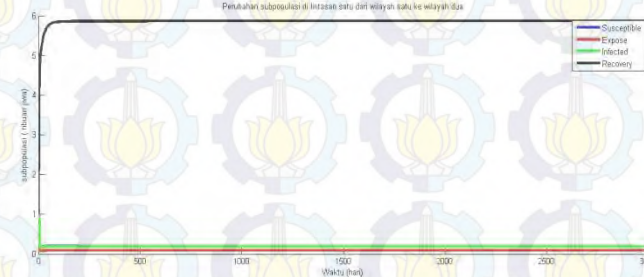


Figure 3.3 Perubahan subpopulasi dilintasan satu  
Dari wilayah satu ke dua  $\mathcal{R}_{0_3} = 58,63 > 1$

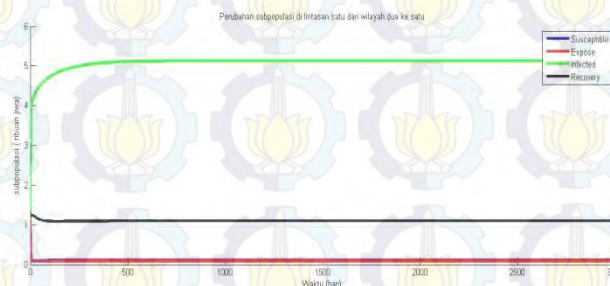


Figure 3.5 Perubahan subpopulasi dilintasan satu  
dari wilayah dua ke satu  $\mathcal{R}_{0_3} = 58,63 > 1$

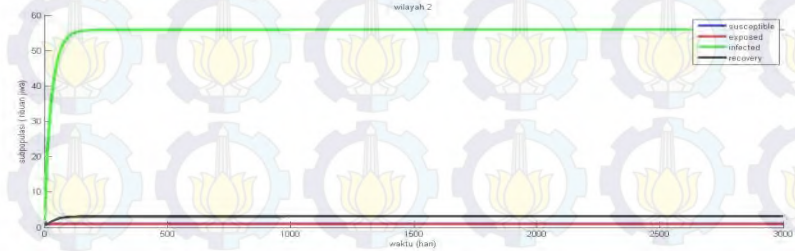


Figure 3.2 wilayah dua  $\mathcal{R}_{0_2} = 58,59 > 1$

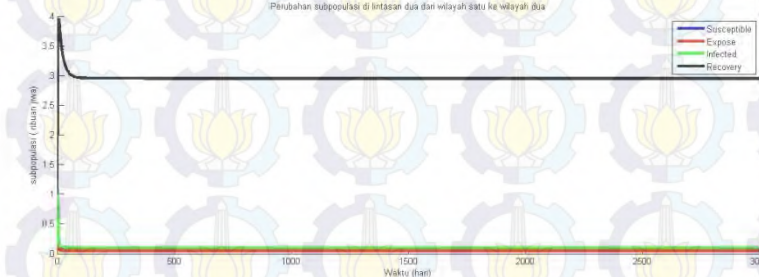


Figure 3.4 Perubahan subpopulasi dilintasan dua  
dari wilayah satu ke wilayah dua  $\mathcal{R}_{0_3} = 58,63 > 1$

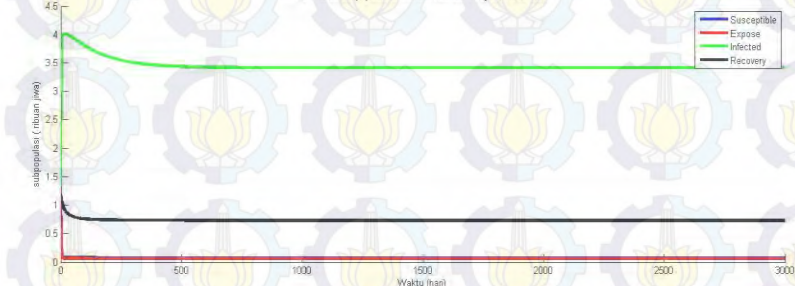


Figure 3.6 Perubahan subpopulasi dilintasan dua  
dari wilayah dua ke satu  $\mathcal{R}_{0_3} = 58,63 > 1$

#### 4. Simulasi dan Analisis

$\mathcal{R}_{0_3} > \mathcal{R}_{0_2} > \mathcal{R}_{0_1} > 1$  artinya penyebaran virus di lintasan paling tinggi. Hal ini dikarenakan individu di lintasan berasal dari wilayah satu dan dua. Sedangkan wilayah satu dan dua dalam keadaan endemik.

$\mathcal{R}_{0_2} > \mathcal{R}_{0_1}$  artinya penyebaran virus di wilayah dua lebih tinggi daripada di wilayah satu. Hal ini dikarenakan *rate* transmisi virus di wilayah dua ( $\beta_2$ ) lebih besar daripada *rate* transmisi virus di wilayah satu ( $\beta_1$ ). Penyebaran virus di wilayah satu tidak hanya disebabkan oleh individu *infected* dari wilayah satu, tetapi juga dapat disebabkan oleh individu *exposed* yang melakukan *travelling* dari wilayah dua yang berubah status menjadi individu *infected* di wilayah satu.



## 4. Simulasi dan Analisis

B. When  $\mathcal{R}_{0_2} > \mathcal{R}_{0_3} > 1$  and  $\mathcal{R}_{0_1} < 1$

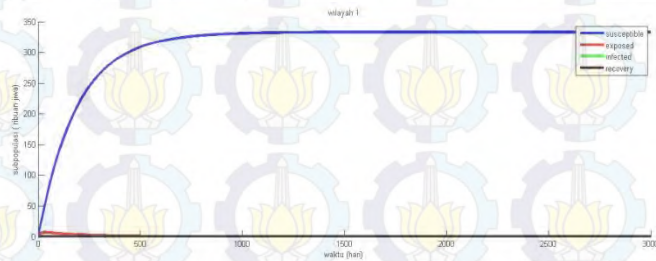


Figure 3.7 wilayah satu  $\mathcal{R}_{0_1} = 0,811 < 1$



Figure 3.9 Perubahan subpopulasi dilintasi satu dari wilayah satu ke wilayah dua  $\mathcal{R}_{0_3} = 58,23 > 1$

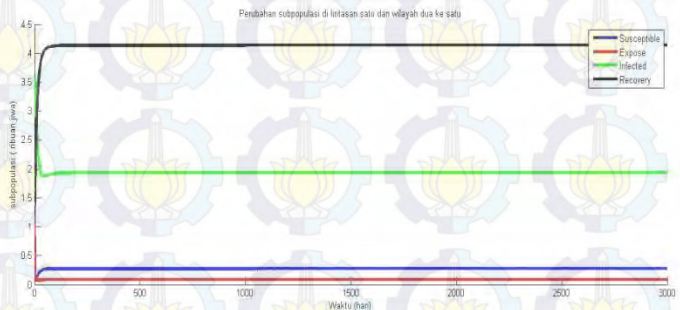


Figure 3.11 Perubahan subpopulasi dilintasi satu dari wilayah dua ke satu  $\mathcal{R}_{0_3} = 58,23 > 1$

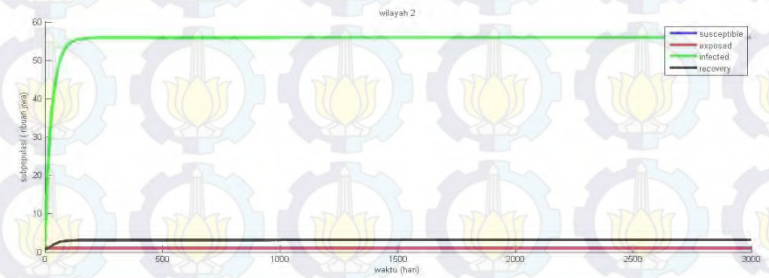


Figure 3.8 wilayah dua  $\mathcal{R}_{0_2} = 58,59 > 1$

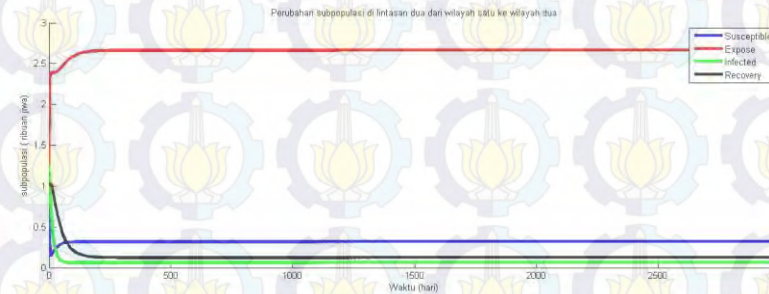


Figure 3.10 Perubahan Subpopulasi dilintasi dua dari wilayah satu ke wilayah dua  $\mathcal{R}_{0_3} = 58,23 > 1$

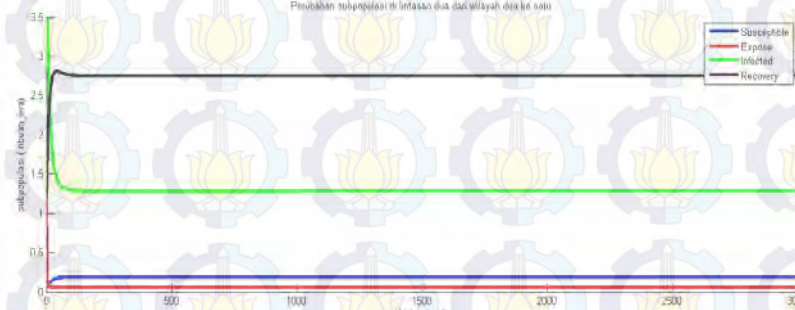


Figure 3.12 Perubahan subpopulasi dilintasi dua dari wilayah dua ke satu  $\mathcal{R}_{0_3} = 58,23 > 1$

#### 4. Simulasi dan Analisis

$\mathcal{R}_{0_2} > \mathcal{R}_{0_3} > 1$  dan  $\mathcal{R}_{0_1} < 1$  artinya sumber penyebaran virus di lintasan adalah individu *infected* dari wilayah dua. Individu *infected* ini merupakan individu *exposed* yang berubah status menjadi Individu *infected* setelah melewati masa inkubasinya saat di lintasan. Individu tersebut dapat menularkan virus kepada individu lain saat di lintasan..



## 4. Simulasi dan Analisis

C. When  $\mathcal{R}_{0_2} < \mathcal{R}_{0_1} < \mathcal{R}_{0_3} < 1$

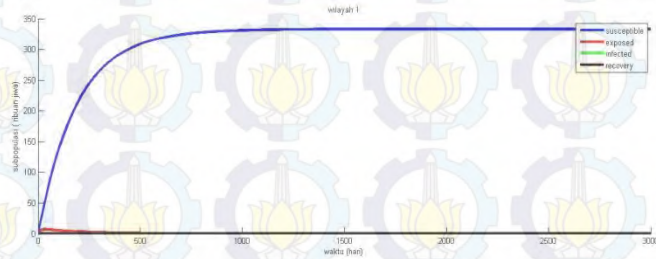


Figure 3.7 wilayah satu  $\mathcal{R}_{0_1} = 0,011 < 1$

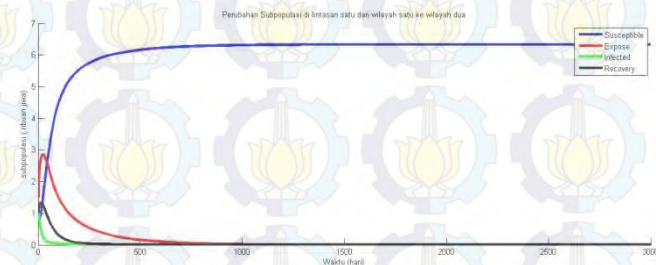


Figure 3.9 Perubahan subpopulasi dilintasan satu dari wilayah satu ke wilayah dua  $\mathcal{R}_{0_3} = 0,812 < 1$

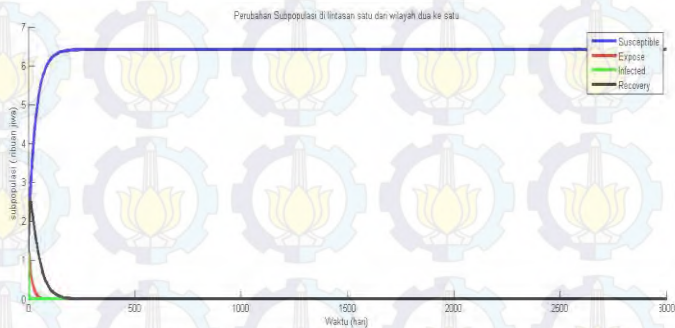


Figure 3.11 Perubahan subpopulasi dilintasan satu dari wilayah dua ke satu  $\mathcal{R}_{0_3} = 0,812 < 1$

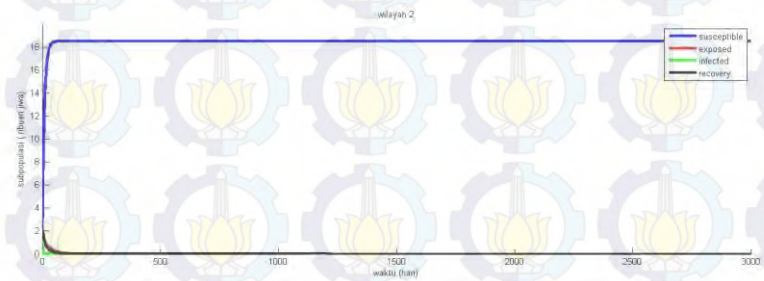


Figure 3.8 wilayah dua  $\mathcal{R}_{0_2} = 0,0020 < 1$

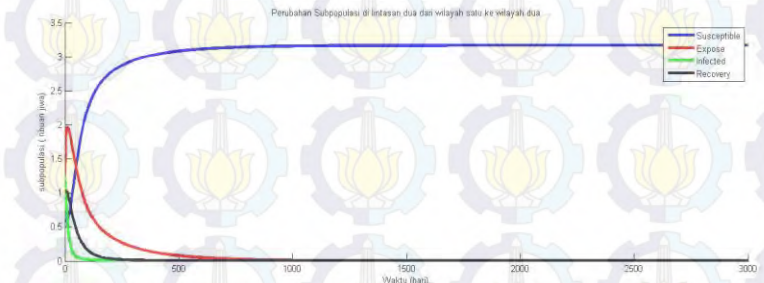


Figure 3.10 Perubahan Subpopulasi dilintasan dua dari wilayah satu ke wilayah dua  $\mathcal{R}_{0_3} = 0,812 < 1$

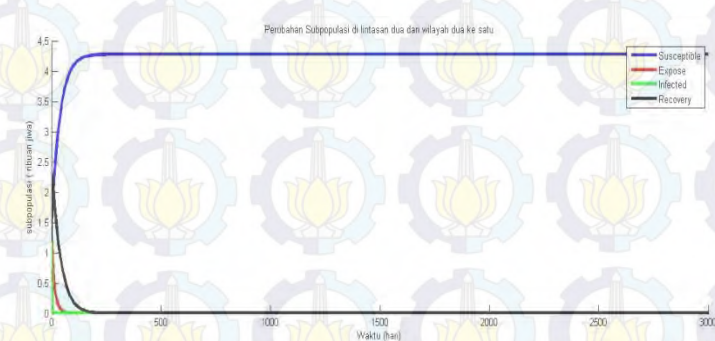


Figure 3.12 Perubahan subpopulasi dilintasan dua dari wilayah dua ke satu  $\mathcal{R}_{0_3} = 0,812 > 1$

#### 4. Simulasi dan Analisis

$\mathcal{R}_{0_2} < \mathcal{R}_{0_1} < \mathcal{R}_{0_3} < 1$  artinya tidak terjadi infeksi virus di wilayah satu, dua dan lintasan. Lintasan dalam keadaan bebas penyakit karena individu dari wilayah satu dan wilayah dua dalam keadaan bebas penyakit. Keadaan bebas penyakit bukan berarti tidak ada virus dalam suatu wilayah, melainkan suatu wilayah tersebut masih terdapat virus. Namun virus tersebut tidak sampai menginfeksi manusia. Berdasarkan  $\mathcal{R}_0$  yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa virus di lintasan paling banyak daripada di wilayah satu dan di wilayah dua.

..



## 5. Kesimpulan

Model pada wilayah satu

$$\frac{dS_1}{dt} = \Lambda_1 - d_1 S_1 - \beta_1 \mu_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 - b_1 S_1 + \sigma_1 S_1$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \mu_1 \beta_1 \frac{S_1}{N_1} I_1 - (d_1 + \gamma_1) E_1 - b_1 E_1 + \sigma_2 E_1$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \gamma_1 E_1 - d_1 I_1 - \varphi_1 I_1$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \varphi_1 I_1 - d_1 R_1 - b_1 R_1 + \sigma_3 R_1$$

Dengan kondisi awal yaitu

$$S_1(0) = S_{1(0)}, E_1(0) = E_{1(0)}, I_1(0) = I_{1(0)}, R_1(0) = R_{1(0)},$$

dan kondisi batas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t) = S_{maks}$$

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} < 0, I_1 \text{ bergerak hanya sampai dengan } L_1$$

Pada model wilayah satu memiliki penyelesaian ada dan tunggal,

Model pada wilayah dua

$$\frac{dS_2}{dt} = \Lambda_2 - d_2 S_2 - \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 - b_2 S_2 + \sigma_4 S_2$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \beta_2 \mu_2 \frac{S_2}{N_2} I_2 - (d_2 + \gamma_2) E_2 - b_2 E_2 + \sigma_5 E_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \gamma_2 E_2 - d_2 I_2 - \varphi_2 I_2$$

$$\frac{dR_2}{dt} = \varphi_2 I_2 - d_2 R_2 - b_2 R_2 + \sigma_6 R_2$$

Dengan kondisi awal yaitu

$$S_2(0) = S_{2(0)}, E_2(0) = E_{2(0)}, I_2(0) = I_{2(0)}, R_2(0) = R_{2(0)},$$

dan kondisi batas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_2(t) = S_{maks}$$

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial x^2} < 0, I_2 \text{ bergerak hanya sampai dengan } L_2$$

Pada model wilayah dua memiliki penyelesaian ada dan tunggal,



## 5. Kesimpulan

Model pada lintasan

$$\frac{d(S_{ik})_j}{dt} = (d_{ik})_j (N_{ik})_j - (d_{ik})_j (S_{ik})_j - \sum_{p=1}^2 \beta_i \mu_i \frac{(S_{ik})_j}{(N_{ik})_j} (I_{pq})_j + \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{pj} (S_{ik})_p - \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{jp} (S_{ik})_j$$

$$\frac{d(E_{ik})_j}{dt} = \sum_{p=1}^2 \beta_i \mu_i \frac{(S_{ik})_j}{(N_{ik})_j} (I_{pq})_j - (d_{ik})_j (E_{ik})_j - (\gamma_{ik})_j (E_{ik})_j + \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{pj} (E_{ik})_p - \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{jp} (E_{ik})_j$$

$$\frac{d(I_{ik})_j}{dt} = (\gamma_{ik})_j (E_{ik})_j - (d_{ik})_j (I_{ik})_j - (\varphi_{ik})_j (I_{ik})_j$$

$$\frac{d(R_{ik})_j}{dt} = (\varphi_{ik})_j (I_{ik})_j - (d_{ik})_j (R_{ik})_j + \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{pj} (R_{ik})_p - \sum_{p=1}^2 (b_{ik})_{jp} (R_{ik})_j$$

Dimana  $i \neq k, p \neq q$

Dengan  $i = 1, 2$  adalah banyaknya kota asal,  $j = 1, 2$  adalah banyaknya lintasan,  $k = 1, 2$  adalah banyaknya kota tujuan

Dengan kondisi awal yaitu

$$(S_{ik})_j(0) = S_{(ik)j(0)}, (E_{ik})_j(0) = E_{(ik)j(0)}$$

$$(I_{ik})_j(0) = I_{(ik)j(0)}, (R_{ik})_j(0) = R_{(ik)j(0)}$$

dan kondisi batas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S_{ik})_j(t) = (S_{ik})_{j \text{ maks}}$$

$$\frac{\partial^2 (I_{ik})_j}{\partial x^2} < 0, (I_{ik})_j \text{ tidak bergerak atau diisolasi di lintasan}$$

Pada model wilayah dua memiliki penyelesaian ada dan tunggal, ,



## 5. Kesimpulan

2. Pada model wilayah satu

$$\mathcal{R}_{01} = \frac{\gamma_1 \beta_1 \mu_1}{(b_1 + d_1 + \gamma_1 - \sigma_2)(d_1 + \varphi_1)}$$

Pada model wilayah dua

$$\mathcal{R}_{02} = \frac{\gamma_2 \beta_2 \mu_2}{(b_2 + d_2 + \gamma_2 - \sigma_5)(d_2 + \varphi_2)}$$

Pada model lintasan

$$\mathcal{R}_{03} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

3. a.  $\mathcal{R}_{03} > \mathcal{R}_{02} > \mathcal{R}_{01} > 1$  artinya penyebaran virus di lintasan paling tinggi. Hal ini dikarenakan individu di lintasan berasal dari wilayah satu dan dua. Sedangkan wilayah satu dan dua dalam keadaan endemik.  $\mathcal{R}_{02} > \mathcal{R}_{01}$  artinya penyebaran virus di wilayah dua lebih tinggi daripada di wilayah satu. Hal ini dikarenakan *rate* transmisi virus di wilayah dua ( $\beta_2$ ) lebih besar daripada *rate* transmisi virus di wilayah satu ( $\beta_1$ ). Penyebaran virus di wilayah satu tidak hanya disebabkan oleh individu *infected* dari wilayah satu, tetapi juga dapat disebabkan oleh individu *exposed* yang melakukan *travelling* dari wilayah dua yang berubah status menjadi individu *infected* di wilayah satu.

- b.  $\mathcal{R}_{02} > \mathcal{R}_{03} > 1$  dan  $\mathcal{R}_{01} < 1$  artinya sumber penyebaran virus di lintasan adalah individu *infected* dari wilayah dua. Individu *infected* ini merupakan individu *exposed* yang berubah status menjadi Individu *infected* setelah melewati masa inkubasinya saat di lintasan. Individu tersebut dapat menularkan virus kepada individu lain saat di lintasan.
- c.  $\mathcal{R}_{02} < \mathcal{R}_{01} < \mathcal{R}_{03} < 1$  artinya tidak terjadi infeksi virus di wilayah satu, dua dan lintasan. Lintasan dalam keadaan bebas penyakit karena individu dari wilayah satu dan wilayah dua dalam keadaan bebas penyakit. Keadaan bebas penyakit bukan berarti tidak ada virus dalam suatu wilayah, melainkan suatu wilayah tersebut masih terdapat virus. Namun virus tersebut tidak sampai menginfeksi manusia. Berdasarkan  $\mathcal{R}_0$  yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa virus di lintasan paling banyak daripada di wilayah satu dan di wilayah dua.



# Daftar Pustaka

- Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Rev.*, 42, 599-653.
- Arino, J., & Driessche, P. v. (2003). A Multi-City Epidemic Model. *Mathematical Population Studies*, 10(3): 175-193.
- Arino, J., Davis, J. R., Hartley, D., Jordan, R., & Driessche, P. v. (2005). A Multi-Species Epidemic Model With Spatial Dynamics. *Mathematical Medicine and Biology*, 22, 129-142.
- Hariyanto, Widodo, B., Nyoman, I. (2013). The Construction of a Model of Pre-Coalition between H1N1-p and H5N1 Influenza Virus in Indonesia. *Mathematical Sciences*, Vol 7, 4899-4907.
- Alan, E., Hariyanto, Mardijah. (2015). Analisis Sistem Dinamik Model Epidemi Tipe SITRS Antar Dua Wilayah.
- Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (2000). *CHAOS: An Introduction to Dynaical Systems*. New York: Springer-Verlag New York Inc.
- Kumar, B., & Srivastaya, J. (2013). Mathematical model on pulmonary and multi-drug resistant tuberculosis patients with vaccination. *Egyptian Mathematical Society*, 22, 311-316.



- Driessche, P. v., & Wetmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-T  
Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission.  
*Mathematical Biosciences*, 180, 29-48.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008). *Differential Equations and Linear Algebra*  
(Sixth ed.). New Jersey: Prentice-Hall.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008). *Differential Equations and Linear Algebra*  
(Sixth ed.). New Jersey: Prentice-Hall.
- Burden, Richard L., & Wetmough, J. (2011). Numerical Analysis. USA: Brooks/Cole  
Cengage Learning.
- Berman, A. & Plemmons, R. J. (1979). Nonnegative Matrices in the Mathematica  
Sciences. New York: Academic Press.
- Clancy & Oneils. (2008). Bilangan Reproduksi Dasar. Artikel ini didapat dari: [http://  
www.google.com/](http://www.google.com/)
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009), *Elementary Differential Equations and  
Boundary Value Problems*, 9<sup>th</sup> edition, John Willey & Sons, Inc, United  
State of America.
- Artikel siana. (2015). Pengertian dan ciri-ciri virus. Artikel ini didapat dari: [http:  
//www.artikelsiana.com/2015/01/pengertian-virus-ciri-ciri-virus-definisi](http://www.artikelsiana.com/2015/01/pengertian-virus-ciri-ciri-virus-definisi).

Gunawan. E., (2015). Masa inkubasi pada virus. Artikel ini didapat dari: <http://www.sidode.com/2015/03/gejala-pencegahan-pengobatan-flu-burung>.

Abdul. R., (1974). Pengertian dan ciri-ciri virus. Artikel ini didapat dari: [http://www.akademia.edu/5420629/pengertian\\_epidemiologi](http://www.akademia.edu/5420629/pengertian_epidemiologi).



The background of the slide is a repeating pattern of lotus flowers inside gears. The lotus flowers are yellow with green outlines, and the gears are light blue. The pattern is arranged in a grid. A large, light blue, wavy-edged banner is centered on the slide, containing the text "Terima Kasih". The banner has a black outline. The bottom of the slide features a solid blue background with a diagonal orange and blue triangle on the left side.

**Terima Kasih**